Номерационни степени: връзка между локална и глобална структура

Мария Соскова[1] и Тед Слеман

Пролетна научна сесия на Факултет по математика и информатика, Софийски университет

[1]Изследванията са частично финансирани по проект на Мария Кюри FP7-MC-IOF STRIDE (298471)

База за автоморфизмите

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсум A. Казваме, че $B \subseteq A$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{A}$, ако винаги когато f е автоморфизъм на $\mathcal{A}$, такъв че $(\forall x \in B)(f(x) = x)$, следва $f = id$.

Примери:

1. Тоталните е-степени са база за $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Селман] $A \leq_e B$ тогава и само тогава, когато $\{X \mid A \leq_e X \oplus \overline{X}\} \supseteq \{X \mid B \leq_e X \oplus \overline{X}\}$.*

2. Множеството от Тюрингови степени под $\mathbf{0}^{(5)}$ са база за $\mathcal{D}_T$.

Теорема. *[Слеман и Удин] Тюринговата степен на всяко 5-генерично образува база за $\mathcal{D}_T$.*

База за автоморфизмите

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсум A. Казваме, че $B \subseteq A$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{A}$, ако винаги когато f е автоморфизъм на $\mathcal{A}$, такъв че $(\forall x \in B)(f(x) = x)$, следва $f = id$.

Примери:

1. Тоталните е-степени са база за $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Селман] $A \leq_e B$ тогава и само тогава, когато $\{X \mid A \leq_e X \oplus \overline{X}\} \supseteq \{X \mid B \leq_e X \oplus \overline{X}\}$.*

2. Множеството от Тюрингови степени под $\mathbf{0}^{(5)}$ са база за $\mathcal{D}_T$.

Теорема. *[Слеман и Удин] Тюринговата степен на всяко 5-генерично образува база за $\mathcal{D}_T$.*

База за автоморфизмите

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсум A. Казваме, че $B \subseteq A$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{A}$, ако винаги когато f е автоморфизъм на $\mathcal{A}$, такъв че $(\forall x \in B)(f(x) = x)$, следва $f = id$.

Примери:

1. Тоталните е-степени са база за $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Селман] $A \leq_e B$ тогава и само тогава, когато* $\{X \mid A \leq_e X \oplus \overline{X}\} \supseteq \{X \mid B \leq_e X \oplus \overline{X}\}$.

2. Множеството от Тюрингови степени под $\mathbf{0}^{(5)}$ са база за $\mathcal{D}_T$.

Теорема. *[Слеман и Удин] Тюринговата степен на всяко 5-генерично образува база за $\mathcal{D}_T$.*

База за автоморфизмите

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсум A. Казваме, че $B \subseteq A$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{A}$, ако винаги когато f е автоморфизъм на $\mathcal{A}$, такъв че $(\forall x \in B)(f(x) = x)$, следва $f = id$.

Примери:

1. Тоталните e-степени са база за $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Селман] $A \leq_e B$ тогава и само тогава, когато* $\{X \mid A \leq_e X \oplus \overline{X}\} \supseteq \{X \mid B \leq_e X \oplus \overline{X}\}$.

2. Множеството от Тюрингови степени под $\mathbf{0}^{(5)}$ са база за $\mathcal{D}_T$.

Теорема. *[Слеман и Удин] Тюринговата степен на всяко 5-генерично образува база за $\mathcal{D}_T$.*

База за автоморфизмите

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсум A. Казваме, че $B \subseteq A$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{A}$, ако винаги когато f е автоморфизъм на $\mathcal{A}$, такъв че $(\forall x \in B)(f(x) = x)$, следва $f = id$.

Примери:

1. Тоталните е-степени са база за $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Селман] $A \leq_e B$ тогава и само тогава, когато* $\{X \mid A \leq_e X \oplus \overline{X}\} \supseteq \{X \mid B \leq_e X \oplus \overline{X}\}$.

2. Множеството от Тюрингови степени под $\mathbf{0}^{(5)}$ са база за $\mathcal{D}_T$.

Теорема. *[Слеман и Удин] Тюринговата степен на всяко 5-генерично образува база за $\mathcal{D}_T$.*

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π^0_1 e-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}'_e$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}''_e$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}^{(5)}_e$.

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π^0_1 e-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}'_e$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}''_e$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}^{(5)}_e$.

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π_1^0 е-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}_e'$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}_e''$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}_e^{(5)}$.

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π^0_1 е-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}'_e$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички тотални степени под $\mathbf{0}''_e$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}^{(5)}_e$.

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π^0_1 е-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}'_e$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички тотални степени под $\mathbf{0}''_e$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}^{(5)}_e$.

Основен резултат

Теорема. *Множеството от $\mathcal{R}$ от Π^0_1 е-степените е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$.*

1. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}'_e$.
2. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{R}(\mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_T \mid \mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в и над някоя степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'\}$.
3. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички степени, които са в образа на множеството $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'} [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$.
4. Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фискира всички тотални степени под $\mathbf{0}''_e$.

Итерираме стъпки 2, 3 и 4 до: Всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$, който фиксира $\mathcal{R}$, фиксира всички тотални степени под $\mathbf{0}^{(5)}_e$.

Първа стъпка

Теорема.[*Слеман и Удин*] *Има крайно множество от Тюрингови степени под* $\mathbf{0}'$, $\vec{\mathbf{p}}$, *които определят копие на стандартния модел на аритметиката* $\mathcal{M}$ *и индексиране на рекурсивно номеруемите степени: функция* $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_T(\leq \mathbf{0}')$, *такава че* $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_T(W_e)$.

Има крайно множество от тотални е-степени $\vec{p}$, които определят копие на стандартния модел на аритметиката $\mathcal{M}$ и индексиране на $\mathcal{R}$: функция $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq {\mathbf{0}'}_e)$, такава че $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(\overline{W_e})$.

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните е-степени: функция $\psi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq {\mathbf{0}'}_e)$, такава че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e\}^{\emptyset'}$, то $\psi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(X \oplus \overline{X})$.

Първа стъпка

Теорема._[Слеман и Удин] Има крайно множество от Тюрингови степени под $\mathbf{0}'$, $\vec{\mathbf{p}}$, които определят копие на стандартния модел на аритметиката $\mathcal{M}$ и индексиране на рекурсивно номеруемите степени: функция $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_T(\leq \mathbf{0}')$, такава че $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_T(W_e)$._

Има крайно множество от тотални е-степени $\vec{p}$, които определят копие на стандартния модел на аритметиката $\mathcal{M}$ и индексиране на $\mathcal{R}$: функция $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, такава че $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(\overline{W_e})$.

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните е-степени: функция $\psi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, такава че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e\}^{\emptyset'}$, то $\psi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(X \oplus \overline{X})$.

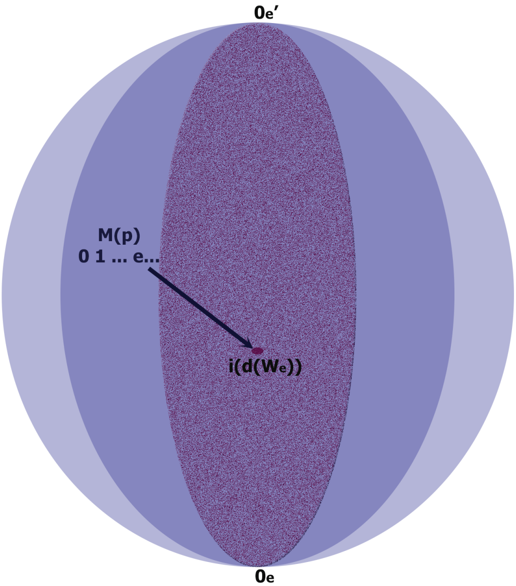
Първа стъпка

Теорема.*[Слеман и Удин] Има крайно множество от Тюрингови степени под $\mathbf{0}'$, $\vec{\mathbf{p}}$, които определят копие на стандартния модел на аритметиката $\mathcal{M}$ и индексиране на рекурсивно номеруемите степени: функция $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_T(\leq \mathbf{0}')$, такава че $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_T(W_e)$.*

Има крайно множество от тотални е-степени $\vec{p}$, които определят копие на стандартния модел на аритметиката $\mathcal{M}$ и индексиране на $\mathcal{R}$: функция $\varphi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, такава че $\varphi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(\overline{W_e})$.

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните е-степени: функция $\psi : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, такава че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e\}^{\emptyset'}$, то $\psi(e^{\mathcal{M}}) = d_e(X \oplus \overline{X})$.


0e′
M(p)
0 1 ... e...
i(d(We))
0e

Първа стъпка

Теорема. *Всяка тотална степен под $\mathbf{0}'_e$ е точна горна граница на две ниски степени.*

Нека с $\underline{LD - \mathcal{R}}$ означим множеството на е-степените на множества от вида $\overline{W_e \setminus W_i}$, които са ниски.

Теорема. *Всяка ниска степен има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$ и $LD - \mathcal{R}$.*

Теорема. *Всяка степен от множеството $LD - \mathcal{R}$ има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$.*

Теорема.*[Ганчев, Соскова] Ниските степени са определими в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$.*

Индексиране на $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Индексиране на $LD - \mathcal{R}$ $\rightarrow$ Инедксиране на ниските е-степени. $\rightarrow$ Инедксиране на тоталните е-степени.

Първа стъпка

Теорема. *Всяка тотална степен под $\mathbf{0}'_e$ е точна горна граница на две ниски степени.*

Нека с $\underline{LD - \mathcal{R}}$ означим множеството на e-степените на множества от вида $\overline{W_e \setminus W_i}$, които са ниски.

Теорема. *Всяка ниска степен има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$ и $LD - \mathcal{R}$.*

Теорема. *Всяка степен от множеството $LD - \mathcal{R}$ има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$.*

Теорема.[Ганчев, Соскова] *Ниските степени са определими в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$.*

Индексиране на $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Индексиране на $LD - \mathcal{R}$ $\rightarrow$ Инедксиране на ниските e-степени. $\rightarrow$ Инедксиране на тоталните e-степени.

Първа стъпка

Теорема. *Всяка тотална степен под $\mathbf{0}'_e$ е точна горна граница на две ниски степени.*

Нека с $LD - \mathcal{R}$ означим множеството на е-степените на множества от вида $\overline{W_e \setminus W_i}$, които са ниски.

Теорема. *Всяка ниска степен има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$ и $LD - \mathcal{R}$.*

Теорема. *Всяка степен от множеството $LD - \mathcal{R}$ има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$.*

Теорема.*[Ганчев, Соскова] Ниските степени са определими в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$.*

Индексиране на $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Индексиране на $LD - \mathcal{R}$ $\rightarrow$ Инедксиране на ниските е-степени. $\rightarrow$ Инедксиране на тоталните е-степени.

Първа стъпка

Теорема. *Всяка тотална степен под $\mathbf{0}'_e$ е точна горна граница на две ниски степени.*

Нека с $LD-\mathcal{R}$ означим множеството на е-степените на множества от вида $\overline{W_e \setminus W_i}$, които са ниски.

Теорема. *Всяка ниска степен има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$ и $LD-\mathcal{R}$.*

Теорема. *Всяка степен от множеството $LD-\mathcal{R}$ има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$.*

Теорема.*[Ганчев, Соскова] Нискиte степени са определими в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$.*

Индексиране на $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Индексиране на $LD-\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Инедксиране на ниските е-степени. $\rightarrow$ Инедксиране на тоталните е-степени.

Първа стъпка

Теорема. *Всяка тотална степен под $\mathbf{0}'_e$ е точна горна граница на две ниски степени.*

Нека с $\overline{LD - \mathcal{R}}$ означим множеството на е-степените на множества от вида $W_e \setminus W_i$, които са ниски.

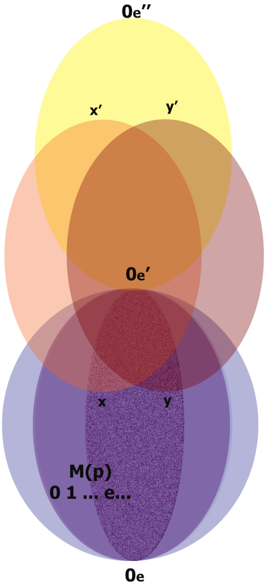
Теорема. *Всяка ниска степен има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$ и $LD - \mathcal{R}$.*

Теорема. *Всяка степен от множеството $LD - \mathcal{R}$ има уникална позиция спрямо елементите на $\mathcal{R}$.*

Теорема.*[Ганчев, Соскова] Ниските степени са определими в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$.*

Индексиране на $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ Индексиране на $LD - \mathcal{R}$ $\rightarrow$ Инедксиране на ниските е-степени. $\rightarrow$ Инедксиране на тоталните е-степени.

Втора стъпка



Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на $\mathcal{R}(\mathbf{0}')$: функция $\varphi' : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}''_e)$, такава, че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e_1\}^{\emptyset'}$, и Y множеството $W^X_{e_2}$, то $\varphi'(e_1^{\mathcal{M}}, e_2^{\mathcal{M}}) = d_e(Y \oplus \overline{Y})$.

Теорема. *[Шонфилд] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в и над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a} = \mathbf{x}'$ *за някоя* $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$.

Теорема. *[Калимулин] Операторът скок е определим в* $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *[Сакс] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в* $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ *и* $\mathbf{a}$ *не е над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a}$ *е точна горна граница на две ниски релативно* $\mathbf{x}$ *степени, които са р.н в и над* $\mathbf{x}$ *и не са над* $\mathbf{0}'$.

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на $\mathcal{R}(\mathbf{0}')$: функция $\varphi' : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}''_e)$, такава, че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e_1\}^{\emptyset'}$, и Y множеството $W^X_{e_2}$, то $\varphi'(e_1^{\mathcal{M}}, e_2^{\mathcal{M}}) = d_e(Y \oplus \overline{Y})$.

Теорема.*[Шонфилд] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в и над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a} = \mathbf{x}'$ *за някоя* $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$.

Теорема.*[Калимулин] Операторът скок е определим в* $\mathcal{D}_e$.

Теорема.*[Сакс] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в* $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ *и* $\mathbf{a}$ *не е над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a}$ *е точна горна граница на две ниски релативно* $\mathbf{x}$ *степени, които са р.н в и над* $\mathbf{x}$ *и не са над* $\mathbf{0}'$.

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на $\mathcal{R}(\mathbf{0}')$: функция $\varphi' : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}''_e)$, такава, че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e_1\}^{\emptyset'}$, и Y множеството $W^X_{e_2}$, то $\varphi'(e_1^{\mathcal{M}}, e_2^{\mathcal{M}}) = d_e(Y \oplus \overline{Y})$.

Теорема.*[Шонфилд] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в и над* $\mathbf{0}'$*, то* $\mathbf{a} = \mathbf{x}'$ *за някоя* $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$.

Теорема.*[Калимулин] Операторът скок е определим в* $\mathcal{D}_e$.

Теорема.*[Сакс] Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в* $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ *и* $\mathbf{a}$ *не е над* $\mathbf{0}'$*, то* $\mathbf{a}$ *е точна горна граница на две ниски релативно* $\mathbf{x}$ *степени, които са р.н в и над* $\mathbf{x}$ *и не са над* $\mathbf{0}'$.

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на $\mathcal{R}(\mathbf{0}')$: функция $\varphi' : \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{D}(\leq \mathbf{0}_e'')$, такава, че ако X е множеството, което се изчислява с $\{e_1\}^{\emptyset'}$, и Y множеството $W_{e_2}^X$, то $\varphi'(e_1^{\mathcal{M}}, e_2^{\mathcal{M}}) = d_e(Y \oplus \overline{Y})$.

Теорема.[Шонфилд] *Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в и над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a} = \mathbf{x}'$ *за някоя* $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$.

Теорема.[Калимулин] *Операторът скок е определим в* $\mathcal{D}_e$.

Теорема.[Сакс] *Ако* $\mathbf{a}$ *е р.н. в* $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ *и* $\mathbf{a}$ *не е над* $\mathbf{0}'$, *то* $\mathbf{a}$ *е точна горна граница на две ниски релативно* $\mathbf{x}$ *степени, които са р.н в и над* $\mathbf{x}$ *и не са над* $\mathbf{0}'$.

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на образите на Тюринговите степените $\mathbf{a}$, които са р. н. в, над и ниски спрямо някоя $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$ и които не са над $\mathbf{0}'$.

Теорема. *[Ганчев, Кай, Лемп, Милър, Соскова] Тоталните степени са определими в $\mathcal{D}_e$.*

Образът на релацията над $\mathcal{D}_T$: "$\mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathbf{x}$" е определима в $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *Нека $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ е фиксирано. Всяка степен измежду ниските релативно $\mathbf{x}$, които са р.н. в и над $\mathbf{x}$ и които не са над $\mathbf{0}'$ има уникална позиция спрямо степените под $\mathbf{0}'$.*

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на образите на Тюринговите степените $\mathbf{a}$, които са р. н. в, над и ниски спрямо някоя $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$ и които не са над $\mathbf{0}'$.

Теорема. *[Ганчев, Кай, Лемп, Милър, Соскова] Тоталните степени са определими в $\mathcal{D}_e$.*

Образът на релацията над $\mathcal{D}_T$: "$\mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathbf{x}$" е определима в $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *Нека $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ е фиксирано. Всяка степен измежду ниските релативно $\mathbf{x}$, които са р.н. в и над $\mathbf{x}$ и които не са над $\mathbf{0}'$ има уникална позиция спрямо степените под $\mathbf{0}'$.*

Втора стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на образите на Тюринговите степените $\mathbf{a}$, които са р. н. в, над и ниски спрямо някоя $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'$ и които не са над $\mathbf{0}'$.

Теорема. *[Ганчев, Кай, Лемп, Милър, Соскова] Тоталните степени са определими в $\mathcal{D}_e$.*

Образът на релацията над $\mathcal{D}_T$: "$\mathbf{a}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathbf{x}$" е определима в $\mathcal{D}_e$.

Теорема. *Нека $\mathbf{x} < \mathbf{0}'$ е фиксирано. Всяка степен измежду ниските релативно $\mathbf{x}$, които са р.н. в и над $\mathbf{x}$ и които не са над $\mathbf{0}'$ има уникална позиция спрямо степените под $\mathbf{0}'$.*

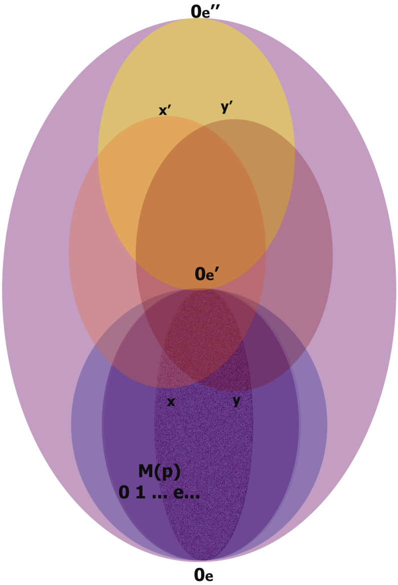
Трета стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на образа на $\mathcal{I}(\mathbf{0}') = \bigcup_{\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'} [\mathsf{x}, \mathsf{x}']$.

Релативизираме стъпка 1 над произволно тотално x.

Четвърта стъпка



Четвърта стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните множества под $\mathbf{0}_e''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{x} < \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1 \vee \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_3 \vee \mathbf{y}_4)$, *степени* $\mathbf{y}_i$ *с* $\mathbf{y}_i' \leq \mathbf{0}''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{y} < \mathbf{0}''$, *такава че* $\mathbf{y}' \leq \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{y} = (\mathbf{z}_1 \vee \mathbf{z}_2) \wedge (\mathbf{z}_3 \vee \mathbf{z}_4)$, *за 2-генерични степени* $\mathbf{z}_i$.

Теорема. *За всяка 2-генерична Тюрингова степен* $\mathbf{z} < \mathbf{0}''$, *има високи степени* $\mathbf{h}_1$ *и* $\mathbf{h}_2$ *такива, че* $\mathbf{z} = (\mathbf{h}_1 \vee \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{h}_2 \vee \mathbf{z})$.

Четвърта стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните множества под $\mathbf{0}_e''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{x} < \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1 \vee \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_3 \vee \mathbf{y}_4)$, *степени* $\mathbf{y}_i$ *с* $\mathbf{y}_i' \leq \mathbf{0}''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{y} < \mathbf{0}''$, *такава че* $\mathbf{y}' \leq \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{y} = (\mathbf{z}_1 \vee \mathbf{z}_2) \wedge (\mathbf{z}_3 \vee \mathbf{z}_4)$, *за 2-генерични степени* $\mathbf{z}_i$.

Теорема. *За всяка 2-генерична Тюрингова степен* $\mathbf{z} < \mathbf{0}''$, *има високи степени* $\mathbf{h}_1$ *и* $\mathbf{h}_2$ *такива, че* $\mathbf{z} = (\mathbf{h}_1 \vee \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{h}_2 \vee \mathbf{z})$.

Четвърта стъпка

Цел

Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните множества под $\mathbf{0}''_e$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{x} < \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1 \vee \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_3 \vee \mathbf{y}_4)$, *степени* $\mathbf{y}_i$ *с* $\mathbf{y}_i' \leq \mathbf{0}''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{y} < \mathbf{0}''$, *такава че* $\mathbf{y}' \leq \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{y} = (\mathbf{z}_1 \vee \mathbf{z}_2) \wedge (\mathbf{z}_3 \vee \mathbf{z}_4)$, *за 2-генерични степени* $\mathbf{z}_i$.

Теорема. *За всяка 2-генерична Тюрингова степен* $\mathbf{z} < \mathbf{0}''$, *има високи степени* $\mathbf{h}_1$ *и* $\mathbf{h}_2$ *такива, че* $\mathbf{z} = (\mathbf{h}_1 \vee \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{h}_2 \vee \mathbf{z})$.

Четвърта стъпка

Цел

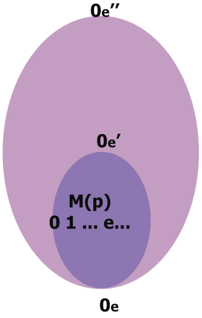
Целта е да покажем, че $\vec{p}$ определят индексиране на тоталните множества под $\mathbf{0}_e''$.

Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{x} < \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1 \vee \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_3 \vee \mathbf{y}_4)$, *степени* $\mathbf{y}_i$ *с* $\mathbf{y}_i' \leq \mathbf{0}''$.

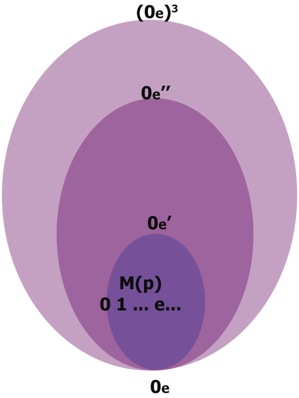
Теорема. *Всяка Тюрингова степен* $\mathbf{y} < \mathbf{0}''$, *такава че* $\mathbf{y}' \leq \mathbf{0}''$ *може да се представи като* $\mathbf{y} = (\mathbf{z}_1 \vee \mathbf{z}_2) \wedge (\mathbf{z}_3 \vee \mathbf{z}_4)$, *за 2-генерични степени* $\mathbf{z}_i$.

Теорема. *За всяка 2-генерична Тюрингова степен* $\mathbf{z} < \mathbf{0}''$, *има високи степени* $\mathbf{h}_1$ *и* $\mathbf{h}_2$ *такива, че* $\mathbf{z} = (\mathbf{h}_1 \vee \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{h}_2 \vee \mathbf{z})$.

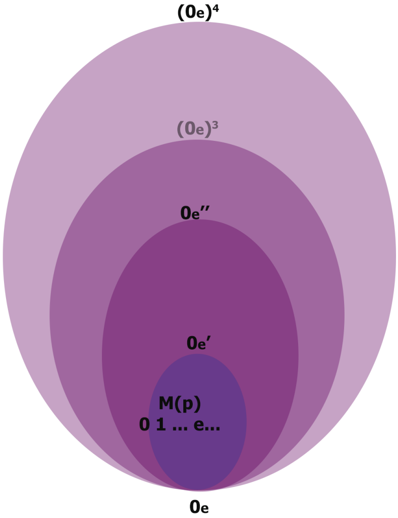
И накрая итерираме



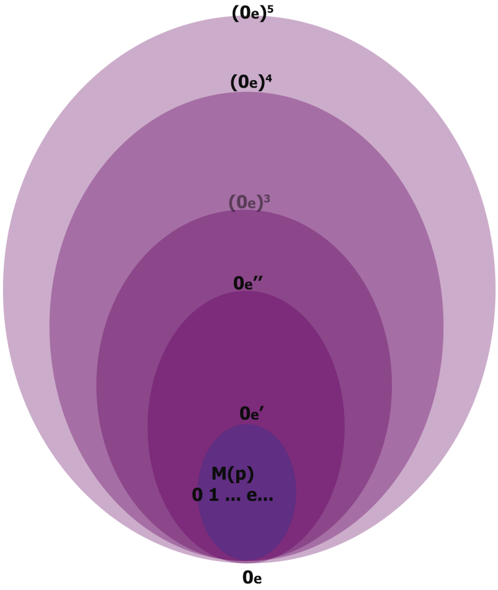
И накрая итерираме



И накрая итерираме



И накрая итерираме



Въпроси

1. Възможно ли е да има нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, който фиксира всички ниски степени?
2. Можем ли да индескираме някой по-широк клас от степени в локалната структура? Например не-ниските степени на множества от вида $\overline{W_i \setminus W_j}$?
3. Има ли Σ^0_2 степен $\mathbf{a}$, такава че за всяка довйка тотални степени $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имаме:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}.$$

4. До каква степен теоремата на Селман е в сила за локланата структура?

Въпроси

1. Възможно ли е да има нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, който фиксира всички ниски степени?
2. Можем ли да индескираме някой по-широк клас от степени в локалната структура? Например не-ниските степени на множества от вида $\overline{W_i \setminus W_j}$?
3. Има ли Σ^0_2 степен $\mathbf{a}$, такава че за всяка довйка тотални степени $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имаме:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}.$$

4. До каква степен теоремата на Селман е в сила за локланата структура?

Въпроси

1. Възможно ли е да има нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$, който фиксира всички ниски степени?
2. Можем ли да индескираме някой по-широк клас от степени в локалната структура? Например не-ниските степени на множества от вида $\overline{W_i \setminus W_j}$?
3. Има ли Σ^0_2 степен $\mathbf{a}$, такава че за всяка довйка тотални степени $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имаме:
$$\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}.$$
4. До каква степен теоремата на Селман е в сила за локланата структура?

Въпроси

1. Възможно ли е да има нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0'}_e)$, който фиксира всички ниски степени?
2. Можем ли да индескираме някой по-широк клас от степени в локалната структура? Например не-ниските степени на множества от вида $\overline{W_i \setminus W_j}$?
3. Има ли Σ^0_2 степен $\mathbf{a}$, такава че за всяка довйка тотални степени $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имаме:
$$\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}.$$
4. До каква степен теоремата на Селман е в сила за локланата структура?

Благодаря за вниманието!