MATHEMATICA BALKANICA
2 (1972) 212—214

СКОРДЕВ Д. (София, Болгария)

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В СМЫСЛЕ Я. ТАГАМЛИЦКОГО

Пусть X-топологическое пространство, Γ-множество, $\prec$-частичный порядок на Γ, φ-отображение множества Γ в множество открытых подмножеств пространства X, причем выполняются следующие два условия:

I. Для любых α и β из Γ неравенство $\alpha \prec \beta$ влечет, что $\varphi(\alpha) \subset \varphi(\beta)$.

II. Любое вполне упорядоченное подмножество Δ частично упорядоченного множества Γ имеет мажоранту α, для которой

$$\varphi(\alpha) = \bigcup_{\beta \in \Delta} \varphi(\beta).$$

При этих предположениях Я. ТАГАМЛИЦКИЙ (см. [2]) ввел понятие *неразложимого относительно* Γ, $\prec$ *и* φ *элемента данного подмножества пространства* X и доказал одну теорему о неразложимых элементах, обобщающую теорему КРЕЙНА-МИЛЬМАНА об экстремальных точках. Приведем соответствующие точные формулировки.

Если A и B-подмножества пространства X, то говорим, что A *неотделимо от* B, если для любого γ из Γ условие $A \subset \varphi(\gamma)$ влечет условие $B \subset \varphi(\gamma)$. Точки a и b пространства X называются *эквивалентными*, если множество $\{a\}$ неотделимо от множества $\{b\}$ и множество $\{b\}$ неотделимо от множества $\{a\}$.

Для любого подмножества S пространства X через (S) обозначается множество всех точек x пространства X, удовлетворяющих следующим двум условиям:

а) множество S неотделимо от множества $\{x\}$;

б) для любого α из Γ, если $S \cap \varphi(\alpha) \neq \emptyset$ и $S \setminus \varphi(\alpha) \neq \emptyset$, то в Γ существует такое β, мажорирующее α, что $x \in \varphi(\beta)$ и $S \setminus \varphi(\beta) \neq \emptyset$.

Точка p пространства X называется *неразложимым* (относительно Γ, $\prec$ и φ) элементом подмножества M этого пространства, если $p \in M$ и условие $p \in (S)$ может выполняться только для таких подмножеств S множества M, которые состоят из точек, эквивалентных p. Множество всех неразложимых элементов множества M обозначается через $E(M)$.

Теорема Я. ТАГАМЛИЦКОГО о неразложимых элементах утверждает следующее: *для любого компактного подмножества M пространства X множество $E(M)$ неотделимо от M.*

С точки зрения применимости этой теоремы важно, чтобы у компактных множеств было, так сказать, не очень много неразложимых элементов. В качестве одного из возможных уточнений этого требования рассмотрим следующее условие, которое будем называть *условием минимальности: для любого компактного подмножества M пространства X множество $E(M)$ содержится в любом компактном подмножестве A множества M, неотделимом от M и насыщенном в M* (последнее означает, что всякая точка множества M, которая эквивалентна некоторой точке множества A, сама принадлежит A). При помощи сформулированной выше теоремы можно легко убедиться, что в случаях, когда выполняется условие минимальности, у любого компактного подмножества M пространства X имеется наименьшее относительно замкнутое подмножество, неотделимое от M и насыщенное в M.

Для произвольного элемента α множества Γ через $\psi(\alpha)$ будем обозначать множество всех точек x пространства X, обладающих следующим свойством: в Γ существует такой элемент β, строго мажорирующий α, что $x \in \varphi(\beta)$.

Теорема 1. *Условие минимальности эквивалентно следующему условию: для любых α и β из Γ, любого компактного множества A, содержащегося в $\varphi(\alpha) \cup \varphi(\beta)$ и непересекающегося с $\psi(\alpha)$, и любой точки x пространства X неотделимость A от $\{x\}$ влечет, что $x \in \varphi(\alpha) \cup \varphi(\beta)$.*

Точку p пространства X будем называть *крайней* (относительно Γ, $\prec$ и φ) точкой множества M, лежащего в X, если $p \in M$ и в любом неотделимом от $\{p\}$ компактном подмножестве множества M имеется точка, эквивалентна p. Понятие крайней точки очевидно проще понятия иеразложимого элемента. К сожалению, в общем случае нельзя утверждать неотделимость множества крайних точек любого компактного подмножества M пространства X от самого M (это можно увидеть при помощи простого примера). В случае однако, когда выполняется условие минимальности, упомянутая неотделимость имеет все-таки место. Это следует из теоремы ТАГАМЛИЦКОГО и легко проверяемого факта, что условие минимальности выполняется тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества M пространства X все неразложимые элементы множества M являются эго крайними точками (таким образом, теорема 1 дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любого компактного множества M, лежащего в X, все элементы множества $E(M)$ были крайними точками M).

Наряду с необходимым и достаточным условием, которое дается теоремой 1, полезными могут оказаться и некоторые условия, которые являются только достаточными. Сформулируем сейчас одно такое условие.

Теорема 2. *Пусть Γ-некоторая совокупность открытх подмножеств пространства X, отношение $\prec$ совпадает с отношением включения и φ-тождественное отображение Γ на себя. Для того, чтобы в этом случае выполнялось условие минимальности, достаточно, чтобы существовала совокупность Ω со следующими свойствами:*

a) *элементы Ω являются непрерывными отображениями пространства X в множество вещественных чисел;*

б) *для любых f и g из Ω и любых положительных чисел λ и μ отображение $\lambda f + \mu g$ также принадлежит Ω;*

в) *для любого f из Ω и любой точки a пространства X*

$$\{x : f(x) < f(a)\} \in \Gamma;$$

г) *для любого множества U, принадлежащего Γ, и любой точки a пространства X, непринадлежащей множеству U, существует такое f из Ω, что для любого x из U имеет место неравенство $f(x) < f(a)$.*

Легко проверяется, что условия а) — г) из теоремы 2 выполняются например в случае, когда X является топологическим линейным пространством, Γ состоит из всех открытых выпуклых подмножеств этого пространства, а Ω — из всех непрерывных функционалов в X.

В случае, когда X является отделимым локально выпуклым линейным пространством, Γ состоит из всех открытых выпуклых подмножеств пространства X, а $\prec$ φ таковы, как в теореме 2, можно доказать, что для любого компактного выпуклого подмножества M пространства X множество крайних (относительно Γ, $\prec$ и φ) точек M совпадает с множеством экстремальных точек M. В общем случае этого нельзя утверждать для множества неразложимых элементов M, которое может быть строго меньше множества экстремальных точек M; например, если M имеет экстремальную точку, через которую нельзя провести замкнутую опорную гиперплоскость к M, то эта точка не будет неразложимым элементом множества M.

Доказательства большей части сформулированных в настоящей работе утверждений по существу содержатся в [1], где рассматривается один несколько более частный случай и рассмотрение проведено в немного иной форме.

Цитирнванная литетау рра

1. СКОРДЕВ, Д.: *Крайни точки и тополоіически неразложими елементи.* Годишник на Соф. унивнрситет, Матем. факултет. 58 (1963/64), 203—218.

2. TAGAMLITZKI Y.: *Development of the functional analysis in Bulgaria* (in this volume).

(Поступила 15. 9. 1972)

Математически институт БАН
София, П. Я. 373
Болгария