

Московакисово разширение на ефективно топологично пространство

Димитър Скордев

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Пролетна научна сесия на ФМИ
28 март 2015 г.

Посвещавам на светлата памет
на колегата и приятеля
блестящия математик

Иван Проданов
(1935–1985)

Дефиниция

База на една топология \mathcal{T} се нарича такава фамилия от \mathcal{T} -отворени множества, че всяко \mathcal{T} -отворено множество да бъде обединение на множества от тази фамилия.

Напр. отворените интервали в \mathbb{R} , имащи за краища рационални числа, съставляват база на обичайната топология в \mathbb{R} .

За да бъде дадена фамилия от подмножества на едно множество X база на някаква топология в X , необходимо и достатъчно е множеството X и сечението на кои да е две множества от дадената фамилия да могат да се представят като обединения на множества от тази фамилия.

Когато горното условие е изпълнено, дадената фамилия от подмножества на X е база на точно една топология \mathcal{T} в X – на онази, чиито \mathcal{T} -отворени множества са всевъзможните обединения на множества от въпросната фамилия.

Дефиниция

Ефективно топологично пространство (ЕТП) ще наричаме всяка наредена двойка (X, \mathcal{U}) , където X е множество, а $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ е база на някоя топология в X със свойството T_0 .

Пример 1. Нека $i \mapsto \mathcal{U}_i$ е тотална номерация на множеството на интервалите в \mathbb{R} , имащи за краища рационални числа.

Тогава $(\mathbb{R}, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Пример 2. Нека X е множеството на всички частични функции от \mathbb{N} към \mathbb{N} , а f_0, f_1, f_2, \dots е ефективно подреждане в редица на онези от тях, които са с крайна дефиниционна област. За всяко $i \in \mathbb{N}$ нека \mathcal{U}_i е множеството на всички функции от X , които са продължения на f_i . Тогава $(X, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Пример 3. Нека (X, d) е сепарабелно метрично пространство, A е изброимо навсякъде гъсто множество в него, а $i \mapsto \mathcal{U}_i$ е тотална номерация на множеството на отворените кълбета в (X, d) с центрове в A и радиуси от вида 2^{-k} , където $k \in \mathbb{N}$. Тогава $(X, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Дефиниция

Казваме, че ЕТП (X, \mathcal{U}) е *изчислимо*, ако съществува такова рекурсивно номеруемо подмножество S на \mathbb{N}^3 , че
$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \bigcup \{ \mathcal{U}_k \mid (i, j, k) \in S \}$$
 при всеки избор на i и j в \mathbb{N} .

Пример 1'. Ако номерацията $i \mapsto \mathcal{U}_i$ от пример 1 е изчислима, то ЕТП $(\mathbb{R}, \{ \mathcal{U}_i \}_{i \in \mathbb{N}})$ е изчислимо.

Пример 2'. ЕТП, разгледано в пример 2, е изчислимо.

Пример 3'. Нека K е положително цяло число, $X = \mathbb{R}^K$, d е Евклидовата метрика в \mathbb{R}^K , $A = \mathbb{Q}^K$ и номерацията $i \mapsto \mathcal{U}_i$ от пример 3 е изчислима. Тогава ЕТП, разгледано в пример 3, е изчислимо.

И в трите примера по-горе можем да си послужим с
$$S = \{ (i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \}$$
. В първите два от тях може да се използва и
$$S = \{ (i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \}$$
.

Дефиниция

Нека (X, \mathcal{U}) е ЕТП. При $x \in X$ полагаме $\mathcal{U}^{-1}(x) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in \mathcal{U}_i\}$.
Казваме, че елементът x е \mathcal{U} -изчислим, ако множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ е рекурсивно номеруемо.

Пример 1''. Ако \mathcal{U} е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то едно реално число е \mathcal{U} -изчислимо точно тогава, когато то е изчислимо в обичайния смисъл.

Пример 2''. Ако \mathcal{U} е номерация от вида, разгледан в пример 2, то една частична функция от \mathbb{N} към \mathbb{N} е \mathcal{U} -изчислима точно тогава, когато тя е частично рекурсивна.

Пример 3''. При предположенията на пример 3' един елемент на \mathbb{R}^K е \mathcal{U} -изчислим точно тогава, когато неговите компоненти са изчислими реални числа.

Дефиниция

Нека (X, \mathcal{U}) и (Y, \mathcal{V}) са ЕТП, а f е частична функция от X към Y . За едно изображение F на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ще казваме, че *реализира* f , ако $F(\mathcal{U}^{-1}(x)) = \mathcal{V}^{-1}(f(x))$ за всяко $x \in \text{dom}(f)$. Ще казваме, че f е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима, ако съществува номерационен оператор, който реализира f .

Пример 1'''. Ако \mathcal{U} е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} е $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ -изчислима точно тогава, когато тя е изчислима в обичайния смисъл.

Пример 3'''. При предположенията на пример 3', ако \mathcal{V} е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то една частична функция от \mathbb{R}^K към \mathbb{R} е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима точно тогава, когато тя е изчислима в обичайния смисъл.

Някои твърдения за запазване на изчислимостта

Твърдение 1

Ако (X, \mathcal{U}) и (Y, \mathcal{V}) са ЕТП, f е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима частична функция от X към Y и a е \mathcal{U} -изчислим елемент на $\text{dom}(f)$, то $f(a)$ е \mathcal{V} -изчислим елемент на Y .

Твърдение 2

Ако (X, \mathcal{U}) и (Y, \mathcal{V}) са ЕТП, а b е \mathcal{V} -изчислим елемент на Y , то константната функция от X към Y със стойност b е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима.

За произволни функции f и g ще означаваме с gf функцията $x \mapsto g(f(x))$ ($\text{dom}(gf) = \{x \in \text{dom}(f) \mid f(x) \in \text{dom}(g)\}$).

Твърдение 3

Ако (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{V}) и (Z, \mathcal{W}) са ЕТП, f е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима частична функция от X към Y и g е $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ -изчислима частична функция от Y към Z , то частичната функция gf от X към Z е $(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ -изчислима.

Изчислимот на частични функции от ЕТП към \mathbb{N}

Нека $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, където $\mathcal{A}_i = \{i\}$. Очевидно $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ е едно изчислимо ЕТП и всички елементи на \mathbb{N} са \mathcal{A} -изчислими.

Теорема

Нека (X, \mathcal{U}) е ЕНП, а f е частична функция от X към \mathbb{N} . За да бъде функцията f $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -изчислима, достатъчно е да съществува такава частично рекурсивна функция на един аргумент φ , че за всяко $x \in \text{dom}(f)$ и всяко $y \in \mathbb{N}$ да е в сила еквивалентността

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

Ако $\text{rng}(f) \subseteq \{0, 1\}$, то за да бъде функцията f $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -изчислима, достатъчно е да съществуват такива непресичащи се рекурсивно номеруеми подмножества E_0 и E_1 на \mathbb{N} , че за всяко $x \in \text{dom}(f)$ да бъдат в сила еквивалентностите

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1}(x) \cap E_y \neq \emptyset, \quad y = 0, 1.$$

Ако ЕНП (X, \mathcal{U}) е изчислимо, тези условия са и необходими.

Московакисово разширение на ЕТП (I)

Нека (X, \mathcal{U}) е ЕТП. Московакисово разширение X^* на X строим по обичайния начин: X^* е затварянето на $X \cup \{o\}$ относно образуване на наредени двойки при предположение, че $o \notin X$ и никой елемент на $X \cup \{o\}$ не е наредена двойка. Дефинираме фамилия $\mathcal{U}^* = \{U_j^*\}_{j \in \mathbb{N}}$ от подмножества на X^* по следния начин, където $(m, n) \mapsto \langle m, n \rangle$ е такова изчислимо биективно изображение на \mathbb{N}^2 върху \mathbb{N} , че $\langle m, n \rangle \geq \max(m, n)$ за всички $m, n \in \mathbb{N}$:

$$U_0^* = \{o\}, U_{2i+2}^* = U_i, U_{2\langle m, n \rangle + 1}^* = U_m^* \times U_n^*.$$

Теорема

Наредената двойка (X^*, \mathcal{U}^*) е ЕТП, а тъждественото изображение id_X е $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ -изчислима функция от X към X^* и $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U})$ -изчислима частична функция от X^* към X .

По дефиниция $0^* = o$, $(n+1)^* = (n^*, o)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Теорема

Функцията $n \mapsto n^*$ от \mathbb{N} към X^* е $(\mathcal{A}, \mathcal{U}^*)$ -изчислима, а обратната ѝ функция е $(\mathcal{U}^*, \mathcal{A})$ -изчислима.

Следствие

Ако (X^*, \mathcal{U}^*) е Московакисово разширение на ЕТП (X, \mathcal{U}) , то:

- За произволна частична функция от X към X свойството $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ -изчислимост е еквивалентно с всяко от следните три: $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ -изчислимост като частична функция от X към X^* , $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U})$ -изчислимост като частична функция от X^* към X , $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислимост като частична функция от X^* към X^* .
- За да бъде една частична функция от X към \mathbb{N} \mathcal{U} -изчислима, необходимо и достатъчно е тя да бъде \mathcal{U}^* -изчислима като частична функция от X^* към \mathbb{N} .
- За да бъде една частична функция f от X^* към \mathbb{N} \mathcal{U}^* -изчислима, необходимо и достатъчно е частичната функция $z \mapsto f(z)^*$ от X^* към X^* да бъде $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислима.

Оттук нататък ще предполагаме, че е дадено някое ЕТП и е фиксирано негово Московакисово разширение (X^*, \mathcal{U}^*) .

Московакисовото разширение на изчислимо ЕТП е изчислимо

Теорема

Ако ЕТП (X, \mathcal{U}) е изчислимо, то ЕТП (X^*, \mathcal{U}^*) също е изчислимо.

Доказателство. Нека $S \subseteq \mathbb{N}^3$, S е рекурсивно номеруемо и

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \bigcup \{ \mathcal{U}_k \mid (i, j, k) \in S \}$$

при всеки избор на $i, j \in \mathbb{N}$. Определяме индуктивно $S^* \subseteq \mathbb{N}^3$ по следния начин:

- $(0, 0, 0) \in S^*$.
- $(2i + 2, 2j + 2, 2k + 2) \in S^*$ винаги, когато $(i, j, k) \in S$.
- Ако $(m, \bar{m}, r) \in S^*$ и $(n, \bar{n}, s) \in S^*$, то $(2\langle m, n \rangle + 1, 2\langle \bar{m}, \bar{n} \rangle + 1, 2\langle r, s \rangle + 1) \in S^*$.

Множеството S^* е рекурсивно номеруемо и

$$\mathcal{U}_i^* \cap \mathcal{U}_j^* = \bigcup \{ \mathcal{U}_k^* \mid (i, j, k) \in S^* \}$$

при всеки избор на $i, j \in \mathbb{N}$.

Твърдение 1

Един елемент на X е \mathcal{U}^ -изчислим точно тогава, когато е \mathcal{U} -изчислим. Елементът o е \mathcal{U}^* -изчислим.*

Твърдение 2

Ако x и y са произволни елементи на X^ , то елементът (x, y) е \mathcal{U}^* -изчислим точно тогава, когато x и y са \mathcal{U}^* -изчислими.*

Следствие

Един елемент на X^ е \mathcal{U}^* -изчислим точно тогава, когато той може да се получи от \mathcal{U} -изчислими елементи на X и елемента o чрез краен брой прилагания на образуване на наредена двойка.*

$(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислимост на функциите π и δ на Московакис

Функциите π и δ от X^* към X^* се дефинират чрез равенствата

$$\pi(x, y) = x, \quad \delta(x, y) = y, \quad \pi(o) = \delta(o) = o,$$

$$\pi(z) = \delta(z) = (o, o) \text{ при } z \in B$$

Теорема

Функциите π и δ са $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислими.

Доказателство. Ще докажем $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислимостта на функцията π , а разсъжденията за δ са аналогични. Нека $z \in X^*$. Условието $\pi(z) \in \mathcal{U}_j^*$ е изпълнено за дадено $j \in \mathbb{N}$ точно тогава, когато е налице някой от следните случаи:

- $z \in \mathcal{U}_{2\langle j, n \rangle + 1}^*$ за някое $n \in \mathbb{N}$;
- $j = 0$ и $z \in \mathcal{U}_0^*$;
- $j = 1$ и $z \in \mathcal{U}_2^* \cup \mathcal{U}_4^* \cup \mathcal{U}_6^* \cup \dots$.

Оттук е ясно, че π се реализира от изображението

$F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, дефинирано по следния начин:

$$F(M) = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} (2\langle j, n \rangle + 1 \in M) \vee (j = 0 \ \& \ 0 \in M) \vee (j = 1 \ \& \ M \cap \{2, 4, 6, \dots\} \neq \emptyset)\}. \quad \square$$

Теорема

Нека f , g и e са частични функции от X^* към X^* , като $\text{dom}(e) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ и $e(z) = (f(z), g(z))$ за всяко $z \in \text{dom}(e)$. Ако функциите f и g са $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислими, то функцията e също е $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислима.

Доказателство. Нека F и G са номерационни оператори, реализиращи съответно функцията f и функцията g . При $z \in \text{dom}(e)$ и $j \in \mathbb{N}$

$$j \in \mathcal{U}^{*-1}(e(z))$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathcal{U}^{*-1}(f(z)) \exists n \in \mathcal{U}^{*-1}(g(z)) (j = 2\langle m, n \rangle + 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in F(\mathcal{U}^{*-1}(z)) \exists n \in G(\mathcal{U}^{*-1}(z)) (j = 2\langle m, n \rangle + 1).$$

Значи за всяко $z \in \text{dom}(h)$ имаме $\mathcal{U}^{*-1}(e(z)) = E(\mathcal{U}^{*-1}(z))$, където $E : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ се дефинира чрез равенството $E(M) = \{j \mid \exists m \in F(M) \exists n \in G(M) (j = 2\langle m, n \rangle + 1)\}$. □

Функцията e , разгледана в теоремата, ще означаваме с (f, g) .

Запазване на $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислимостта при разклонение

Ако f , g и h са частични функции от X^* към X^* , с $(h \supset f, g)$ ще означаваме функцията e (разклонение към f и g , управлявано от h), определена така: $e(z) = z'$ точно тогава, когато $(z \in h^{-1}(X \cup \{o\}) \& f(z) = z') \vee (z \in h^{-1}(X^* \setminus (X \cup \{o\})) \& g(z) = z')$.

Теорема

Ако f , g и h са $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислими частични функции от X^* към X^* , то и функцията $(h \supset f, g)$ е $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислима.

Доказателство. Нека F , G и H са номерационни оператори, които реализират съответно функциите f , g и h . При $e = (h \supset f, g)$, $z \in \text{dom}(e)$ и $j \in \mathbb{N}$

$$e(z) \in \mathcal{U}_j^* \Leftrightarrow (h(z) \in \mathcal{U}_0^* \cup \mathcal{U}_2^* \cup \mathcal{U}_4^* \cup \dots \& f(z) \in \mathcal{U}_j^*) \\ \vee (h(z) \in \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_3^* \cup \mathcal{U}_5^* \cup \dots \& g(z) \in \mathcal{U}_j^*),$$

т.е. при $M = \mathcal{U}^{*-1}(z)$ имаме

$$j \in \mathcal{U}^{*-1}(e(z)) \Leftrightarrow (H(M) \cap \{0, 2, 4, \dots\} \neq \emptyset \& j \in F(M)) \\ \vee (H(M) \cap \{1, 3, 5, \dots\} \neq \emptyset \& j \in G(M)). \quad \square$$

Запазване на $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислимостта при итерация (I)

Ако f и h са частични функции от X^* към X^* , под итерация на f , управлявана от h ще разбираме частичната функция e от X^* към X^* , определена по следния начин: $e(z) = z'$ точно тогава, когато съществува такава крайна редица $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ от елементи на X^* , че

- $z_0 = z, z_n = z'$;
- $z_k \in h^{-1}(X^* \setminus (X \cup \{o\}))$ и $z_{k+1} = f(z_k)$ при $k < n$;
- $z_n \in h^{-1}(X \cup \{o\})$.

Ще означаваме тази функция с $[f, h]$.

Теорема

Нека f и h са частични функции от X^* към X^* . Ако f и h са $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислими, то и $[f, h]$ е $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислима.

Доказателство. Нека F и H са номерационни оператори, които реализират съответно функциите f и h , и нека $e = [f, h]$. За всяко $m \in \mathbb{N}$ нека D_m е крайното подмножество на \mathbb{N} с каноничен индекс m . Да предположим, че $z \in \text{dom}(e)$. Проверява се, че едно естествено число j принадлежи на $\mathcal{U}^{*-1}(e(z))$ точно тогава, когато за някоя крайна редица $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ от естествени числа са изпълнени следните условия:

- 1 $D_{m_0} \subseteq \mathcal{U}^{*-1}(z)$, $j \in D_{m_n}$; $k < n$;
- 2 $H(D_{m_k}) \cap \{1, 3, 5, \dots\} \neq \emptyset$ и $D_{m_{k+1}} \subseteq F(D_{m_k})$ при $k < n$;
- 3 $H(D_{m_n}) \cap \{0, 2, 4, \dots\} \neq \emptyset$.

Следователно $\mathcal{U}^{*-1}(e(z)) = E(\mathcal{U}^{*-1}(z))$, където $E : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ се дефинира по следния начин: едно естествено число j принадлежи на $E(M)$ точно тогава, когато някоя крайна редица $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ от естествени числа удовлетворява условията $D_{m_0} \subseteq M$, $j \in D_{m_n}$ и условията 2 и 3 по-горе. \square

Едно понятие за изчислимост на оператори в множеството на частичните функции от X^* към X^*

Нека \mathcal{F} е множеството на всички частични функции от X^* към X^* . Някои изображения на \mathcal{F} в себе си ще наречем $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислими по построение (ИПП). Това ще направим чрез следната индуктивна дефиниция:

- Тъждественото изображение $\text{id}_{\mathcal{F}}$ е ИПП.
- Изображение, което съпоставя на всяка функция от \mathcal{F} една и съща $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$ -изчислима функция от \mathcal{F} , е ИПП.
- Ако Γ_1 и Γ_2 са ИПП изображения на \mathcal{F} в себе си, то изображенията $f \mapsto \Gamma_1(f)\Gamma_2(f)$, $f \mapsto (\Gamma_1(f), \Gamma_2(f))$ и $f \mapsto [\Gamma_1(f), \Gamma_2(f)]$ също са ИПП.
- Ако Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 са ИПП изображения на \mathcal{F} в себе си, то изображението $f \mapsto (\Gamma_3(f) \supset \Gamma_1(f), \Gamma_2(f))$ също е ИПП.

Пример. Изображението $f \mapsto (\text{id}_{X^*} \supset \text{id}_X, (f\delta, f\pi))$ е ИПП.

Изображението от горния пример има точно една неподвижна точка (тя е с дефиниционна област X^*).

Теорема

Ако Γ е ИПП изображение на \mathcal{F} в себе си, то Γ има неподвижна точка, която е минимална относно естествената наредба в \mathcal{F} и е (U^*, U^*) -изчислима.

Доказателство. Използваме теоремата за рекурсия от [2] и запазването на (U^*, U^*) -изчислимостта при композиция, съчетаване, разклонение и итерация. □

Литература

- [1] Moschovakis, Y.N. *Abstract first computability. I*. Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 427–464.
- [2] Skordev, D. *Recursion theory on iterative combinatory spaces*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys., **24** (1976), 23–31.
- [3] Weihrauch, K. and Grubba, T. *Elementary computable topology*. J. Univers. Comput. Sci., **15** (2009), 1381–1422.