Разширен абстрактен подход към зацикляниията при изпълнение на хорнови програми

Димитър Скордев

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Пролетна научна конференция на ФМИ
26 март 2011 г.

Дефиниция

*Нека S е множество, а σ е частично изображение на S в S. Ако $s \in S$, то σ-*траектория *с начало s, ще наричаме крайната или безкрайна редица $s_0, s_1, s_2, \ldots$, дефинирана чрез равенствата $s_0 = s$, $s_{i+1} = \sigma(s_i)$.*

Задачата за откриване на зацикляния в най-общ смисъл има за предмет търсене на методи, позволяващи поне в някои от случаите, когато такава редица е безкрайна, да се установява това. Един такъв случай е онзи, когато за някои две различни естествени числа i и j членовете s_i и s_j са дефинирани и равни. Удобни за използване алгоритми, които при наличието на този случай установяват, че той е налице, са дадени например от Флойд и от Брент. Алгоритъмът на Брент е частният случай с $\tau_k = 2^k - 1$ на следния по-общ вид алгоритми, изследвани от Фейт Фич: избрана е строго растяща редица $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ от естествени числа, за която множеството на разликите $\tau_{k+1} - \tau_k$ е неограничено, и търсим такива числа i и j с дефинирани и равни s_i и s_j, че за някое k да имаме $i = \tau_k < j \leq \tau_{k+1}$.

Дефиниция

Нека S е множество, а σ е частично изображение на S в S. Един елемент на S ще наричаме σ-цикличен, *ако някой член с ненулев номер на σ-траекторията с начало дадения елемент съвпада с този елемент.*

Случаят от предходния слайд е налице точно тогава, когато някой член на σ-траекторията с начало s е σ-цикличен.

Дефиниция

Нека σ е частично изображение на S в S. Ще казваме, че σ е монотонно *относно дадена двуместна релация R в S, ако $\forall s', s''(s' \in \mathrm{dom}(\sigma)\ \&\ s' R\, s'' \Rightarrow s'' \in \mathrm{dom}(\sigma)\ \&\ \sigma(s')\, R\, \sigma(s''))$. Ще казваме, че σ е* монотонно *относно дадено частично изображение π на S в S, ако σ е монотонно относно релацията $\{(s', s'') \mid s' = \pi(s'')\}$.*

Пример 1. Всяко частично изображение на S в S е монотонно относно релацията равенство в S, както и относно себе си.

Пример 2. Нека S се състои от всички крайни редици от атомарни формули при дадена сигнатура, като разглеждаме редиците с точност до преименуване на техните променливи. Нека σ е SLD-резолюцията с първата възможна клауза на дадена Хорнова програма, а π е частичната операция в S, премахваща последния член на редицата. Тогава σ е монотонно относно π.

Лема

Ако едно частично изображение е монотонно относно дадена релация, то е монотонно и относно нейната рефлексивно-транзитивна обвивка.

Следствие

Нека S и σ са както в пример 2, а релацията R е налице между две редици от S точно тогава, когато първата с точност до преименуване на променливите е начало на втората. Тогава σ е монотонно относно R.

Нека S е произволно множество, а R е двуместна релация в S.

Дефиниция

Един елемент s' на S ще наричаме силно σ, R-цикличен, *ако имаме $s' R\, s''$ за някой член s'' с ненулев номер на σ-траекторията с начало s'.*

Лема

Нека $s' \in S$. Ако s' е силно σ, R-цикличен, то $s' \in \mathrm{dom}(\sigma)$ и $\sigma(s')$ също е силно σ, R-цикличен.

Дефиниция

Един елемент s' на S ще наричаме σ, R-цикличен, *ако някой елемент s°, за който (s°, s') принадлежи на рефлексивно-транзитивната обвивка на R, е силно σ, R-цикличен.*

Лема

Нека $s' \in S$. Ако s' е σ, R-цикличен, то $s' \in \mathrm{dom}(\sigma)$ и $\sigma(s')$ също е σ, R-цикличен.

Следствие

Ако някой от членовете на една σ-траектория е σ, R-цикличен, то тази траектория е безкрайна.

Забележка. Очевидно всеки силно σ, R-цикличен елемент на S е σ, R-цикличен.

Естествено е да се търсят начини за откриване наличието на σ, R-циклични членове на произволна σ-траектория, съдържаща такива членове. Един начин за това, приложим при предположения, които са изпълнени в условията на пример 2, е предложен в статията

Skordev, D. On the detection of some periodic loops during the execution of Prolog programs. In: Algebraic Methods in Logic and in Computer Science, Banach Center Publications, vol. 28, Warsaw, 1993, 151–166.

Пример 2 (продължение). В условията на пример 2 освен монотонността на σ относно π са налице и следните свойства:

1. $\forall s \in S\, \exists n \in \mathbb{N}\, (s \notin \mathrm{dom}(\pi^n))$.
2. $\mathrm{dom}(\sigma) \subseteq \mathrm{dom}(\pi)$, $\mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{dom}(\pi^2) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma\pi)$.

Очевидно за всяко $s \in S$ дължината на редицата s е най-голямото естествено число n, за което $s \in \mathrm{dom}(\pi^n)$.

Методът, предложен в цитираната статия, е приложим винаги, когато в дадено множество S имаме такива частични изображения σ и π, че σ е монотонно относно π и са налице свойствата 1 и 2 по-горе, а релацията R е дефинирана чрез равенството $R = \{(s', s'') \mid s' = \pi(s'')\}$. При условията на пример 2 този метод позволява откриване на съответния вид зацикляния при търсене в дълбочина.

Забележка. Един по-удобен метод за същото, използваем даже при по-общи предположения, е даден в статията

D. Skordev. An abstract approach to some loop detection problems. Fundamenta Informaticae, **31** (1997), 195–212.

За да обхванем откриването на зацикляния при изпълнение на хорнови програми, което допуска връщане назад (backtracking), в множеството S от пример 2 вместо едно частично изображение σ ще дефинираме една крайна редица от частични изображения – по едно за всяка клауза на дадената хорнова програма. А именно, ако клаузите на програмата са $C_1, \ldots, C_m$, то дефинираме частични изображения $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ на S в S по следния начин: когато r е някое от числата $1, \ldots, m$, изображението σ_r е SLD-резолюцията с клаузата C_r. Свойствата от предходния слайд остават в сила със σ_r в качеството на σ. Това дава възможност за всяка хорнова програма да извършим конструкцията, описана в следващия пример.

Пример 3. Нека в едно множество S са дадени такива частични изображения $\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, че свойствата, посочени в продължението на пример 2, да са в сила, ако в качеството на σ се вземе кое да е от изображенията $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. За всеки елемент s на S най-голямото $n \in \mathbb{N}$, за което $s \in \mathrm{dom}(\pi^n)$, ще наричаме *дължина на s*. Да означим с R рефлексивно-транзитивната обвивка на релацията $\{(s', s'') \mid s' = \pi(s'')\}$. Нека $S^\star$ е множеството на всички крайни редици $(s_0, r_1, s_1, \ldots, s_{q-1}, r_q, s_q)$, където $q \in \mathbb{N}$, $s_0, s_1, \ldots, s_{q-1}, s_q \in S$, $r_1, \ldots, r_q \in \{1, \ldots, m\}$ и $s_{t-1} = \sigma_{r_t}(s_t)$ при $t = 1, \ldots, q$. Елемента s_0 и числото q ще наричаме съответно *водеща компонента* и *дълбочина* на разглеждания елемент на $S^\star$. В $S^\star$ да дефинираме двуместна релация $R^\star$, като приемем, че една редица от $S^\star$ е в релацията $R^\star$ с друга точно тогава, когато първата е начало на втората и всеки от членовете на първата, намиращ се на нечетна поред позиция, е в релация R със съответния член на втората. В следващия слайд дефинираме и частична операция $\sigma^\star$ в $S^\star$, монотонна относно $R^\star$.

Нека $s^\star = (s_0, r_1, s_1, \ldots, s_{q-1}, r_q, s_q) \in S^\star$. Ако $s_0 \in \mathrm{dom}(\sigma_r)$ за някое $r \in \{1, \ldots, m\}$, то полагаме

$$\sigma^\star(s^\star) = (\sigma_r(s_0), r, s_0, r_1, s_1, \ldots, s_{q-1}, r_q, s_q)$$

с най-малкото такова r. Ако няма r с посоченото свойство, то проверяваме дали за някое $t \in \{1, \ldots, q\}$ съществува такова $r \in \{r_t + 1, \ldots, m\}$, че $s_t \in \mathrm{dom}(\sigma_r)$. В случай, че има такова t, полагаме

$$\sigma^\star(s^\star) = (\sigma_r(s_t), r, s_t, r_{t+1}, s_{t+1}, \ldots, s_{q-1}, r_q, s_q)$$

с най-малкото такова t и най-малкото $r \in \{r_t + 1, \ldots, m\}$, за което $s_t \in \mathrm{dom}(\sigma_r)$. В противен случай $\sigma^\star(s^\star)$ остава недефинирано.

Пример 4.

a.

a:-a,b.

?-a,c.

$m = 2$,

$\sigma_1([\mathrm{a}, x_1, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n])$,

$\sigma_2([\mathrm{a}, x_1, \ldots, x_n]) = [\mathrm{a},\mathrm{b}, x_1, \ldots, x_n])$

([a,c])

([c],1,[a,c])

([a,b,c],2,[a,c])

([b,c],1,[a,b,c],2,[a,c])

([a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])

([b,b,c],1,[a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])

([a,b,b,b,c],2,[a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])

. . . .

Членът ([a,b,c],2,[a,c]) на траекторията е $\sigma^\star, R^\star$-цикличен, защото ([a,b]) $R^\star$ ([a,b,c],2,[a,c]) и ([a,b]) е силно $\sigma^\star, R^\star$-цикличен елемент на $S^\star$.

Описание на задачата и метода за решаването ѝ в случая. Даден е някакъв елемент s на S. Интересуваме се дали в $\sigma^\star$-траекторията с начало (s) има $\sigma^\star, R^\star$-цикличен член. Ще опишем метод, чрез който може да се установи наличието на такъв член в случаите, когато го има.

Избираме редица $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$, каквато се използва при метода на Брент или неговото обобщение. За простота да приемем, че $\tau_0 = 0$. Търсим последователните членове на споменатата траектория, като в определени моменти, преди да преминем към следващия член, записваме водещата компонента и дълбочината на последния намерен член и даваме като стойност на един брояч дължината на записаната водеща компонента (интуитивно можем да разглеждаме стойността на този брояч като оценка каква част от записаната водеща компонента е все още неизползвана). Записаните водеща компонента и дълбочина се използват до момента на следващото записване.

Моментите на записване са следните: онези, в които броят на извършените дотогава прилагания на $\sigma^\star$ е число от вида τ_k, онези, в които дълбочината на получения член на траекторията се е оказала не по-голяма от последната преди това записана, и моментите, непосредствено следващи прилагане на $\sigma^\star$ към член, чиято водеща компонента е с дължина 0. В последните два случая считаме, че записаната информация вече не е актуална. При всяко преминаване към нов член на траекторията до момента на следващото записване стойността на брояча се изменя по следното правило: ако стойността му е равна на дължината на водещата компонента на члена, към който прилагаме $\sigma^\star$, тази стойност се намалява с 1, а в останалите случаи тя остава непроменена.

Заключение, че в траекторията има $\sigma^\star, R^\star$-цикличен член, се прави тогава, когато при актуална записана преди това информация има елемент на S, който е в релация R както със записаната водеща компонента, така и с водещата компонента на последния получен член, и има дължина, равна на разликата между дължината на записаната водеща компонента и стойността на брояча.

Забележка. В случая на хорнови програми близък до този алгоритъм е програмно реализиран през 1992 г. от Игор Дурданович. Вж. непубликуваното разширено резюме

D. Skordev, I. Durdanovic. Loop detection in Prolog in the case of possible backtracking.
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/skordev/ldp-cpbt.pdf

Пример 4 (продължение).

a.

a:-a,b.

?-a,c.

$\tau_k = 2^k - 1$

Стъпки	Брояч	Дълбочина	Член на траекторията
*0	/2	1	([a,c])
*1	1/1	2	([c],1,[a,c])
*2	0/3	2	([a,b,c],2,[a,c])
*3	2/2	3	([b,c],1,[a,b,c],2,[a,c])
*4	1/4	3	([a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])
5	3	4	([b,b,c],1,[a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])
6	2	4	([a,b,b,b,c],2,[a,b,b,c],2,[a,b,c],2,[a,c])

Със звездичка са означени моментите на записване, с подчертаване – записаната информация, а с червено – моментът, когато се открива зациклянето, и повтарящата се използвана част на записаната водеща компонента.