Изчислимост на функцията arctg

Нека тройката $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ е представяне на дадено реално число ξ, т.е. членовете ѝ са функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и за всяко n в $\mathbb{N}$ имаме неравенството

$$|\varphi(n) - \xi| < \frac{1}{n+1},$$

където

$$\varphi(n) = \frac{\varphi_1(n) - \varphi_2(n)}{\varphi_3(n) + 1}.$$

Ще искаме да намерим такова представяне (ψ_1, ψ_2, ψ_3) на числото $\operatorname{arctg} \xi$, че функциите ψ_1, ψ_2, ψ_3 да зависят от функциите $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ по μ-рекурсивен начин.

Тъй като функцията tg е изчислима, съществуват такива четириместни рекурсивни функции τ_1, τ_2 и τ_3, че при всеки избор на p, q, r, n в $\mathbb{N}$ и

$$\tau(p,q,r,n) = \frac{\tau_1(p,q,r,n) - \tau_2(p,q,r,n)}{\tau_3(p,q,r,n) + 1}$$

да имаме неравенството

$$\left|\tau(p,q,r,n) - \operatorname{tg} \frac{p-q}{r+1}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Поради изчислимостта на числото $\frac{\pi}{2}$ съществува такава едноместна рекурсивна функция σ, че

$$\left|\frac{\sigma(n)}{n+1} - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{n+1}$$

за всяко n в $\mathbb{N}$. От последното неравенство следват неравенствата

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n+1} < \frac{\sigma(n)-1}{n+1} < \frac{\pi}{2},$$

а от тях е ясно, че

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\sigma(n)-1}{n+1} < \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} \frac{\sigma(n)-1}{n+1} = +\infty.$$

Тъй като

$$\left|\tau(\sigma(n),1,n,n) - \operatorname{tg} \frac{\sigma(n)-1}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

при всеки избор на n в $\mathbb{N}$, ясно е, че и

$$\lim_{n\to\infty} \tau(\sigma(n),1,n,n) = +\infty,$$

следователно за някое естествено число n ще бъде в сила неравенството

$$\tau(\sigma(n),1,n,n)-\frac{1}{n+1}\geq|\varphi(0)|+1.$$

Пак от неравенството (1) (като се използва и неравенството $|\varphi(0)-\xi|<1$) виждаме, че за всяко естествено число n с горното свойство ще имаме

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma(n)-1}{n+1}>|\xi|$$

и значи

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma(n)-1}{n+1}>\xi>\operatorname{tg}\frac{1-\sigma(n)}{n+1}.$$

В частност, ще имаме неравенствата

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma(m)-1}{m+1}>\xi>\operatorname{tg}\frac{1-\sigma(m)}{m+1},$$

където

$$m=\mu n\left[\tau(\sigma(n),1,n,n)-\frac{1}{n+1}\geq|\varphi(0)|+1\right].$$

За произволни естествени числа p,q,r,s,t, ако е изпълнено неравенството

$$\operatorname{tg}\frac{p-q}{r+1}\neq\operatorname{tg}\frac{s-t}{r+1},$$

то съществува естествено число n, удовлетворяващо неравенството

$$\max(|\tau(p,q,r,n)-\varphi(n)|,|\tau(s,t,r,n)-\varphi(n)|)\geq\frac{2}{n+1}.$$

Това е така, защото при $n\to\infty$ лявата страна на това неравенство клони към положителното в случая число

$$\max\left(\left|\operatorname{tg}\frac{p-q}{r+1}-\xi\right|,\left|\operatorname{tg}\frac{s-t}{r+1}-\xi\right|\right),$$

а дясната клони към 0. Очевидно

$$|\tau(p,q,r,n)-\varphi(n)|\geq\frac{2}{n+1}\Rightarrow(\tau(p,q,r,n)-\varphi(n))\left(\operatorname{tg}\frac{p-q}{r+1}-\xi\right)>0,$$
$$|\tau(s,t,r,n)-\varphi(n)|\geq\frac{2}{n+1}\Rightarrow(\tau(s,t,r,n)-\varphi(n))\left(\operatorname{tg}\frac{s-t}{r+1}-\xi\right)>0.$$

Да положим

$$\nu(p,q,r,s,t)=\mu n\left[\max(|\tau(p,q,r,n)-\varphi(n)|,|\tau(s,t,r,n)-\varphi(n)|)\geq\frac{2}{n+1}\right].$$

Чрез индукция ще дефинираме за всяко k от $\mathbb{N}$ естествени числа a_k,b_k,c_k,d_k,e_k така, че при

$$u_k=\frac{a_k-b_k}{c_k+1},\quad v_k=\frac{d_k-e_k}{c_k+1}$$

да бъдат изпълнени неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} < u_k \le u_{k+1} < v_{k+1} \le v_k < \frac{\pi}{2}, \quad v_{k+1} - u_{k+1} \le \frac{2}{3}(v_k - u_k),$$
$$\operatorname{tg} u_k < \xi < \operatorname{tg} v_k.$$

Първо полагаме $a_0 = 1$, $b_0 = \sigma(m)$, $c_0 = m$, $d_0 = \sigma(m)$, $e_0 = 1$. Това осигурява, че имаме неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} < u_0 < v_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} u_0 < \xi < \operatorname{tg} v_0.$$

Да предположим сега, че за дадено k от $\mathbb{N}$ са дефинирани естествени числа a_k, b_k, c_k, d_k, e_k така, че

$$-\frac{\pi}{2} < u_k < v_k < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} u_k < \xi < \operatorname{tg} v_k.$$

Числото c_{k+1} дефинираме така, че да имаме равенството $c_{k+1}+1=3(c_k+1)$, т.е. полагаме $c_{k+1}=3c_k+2$. За да дефинираме $a_{k+1}, b_{k+1}, d_{k+1}, e_{k+1}$, разделяме интервала с краища u_k и v_k на три подинтервала с равни дължини, като разглеждаме числата

$$\tilde{u}_k = u_k + \frac{1}{3}(v_k - u_k) = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}v_k = \frac{(2a_k + d_k) - (2b_k + e_k)}{c_{k+1} + 1},$$
$$\tilde{v}_k = v_k - \frac{1}{3}(v_k - u_k) = \frac{1}{3}u_k + \frac{2}{3}v_k = \frac{(a_k + 2d_k) - (b_k + 2e_k)}{c_{k+1} + 1}.$$

Тъй като $u_k < \tilde{u}_k < \tilde{v}_k < v_k$, в сила е неравенството $\operatorname{tg} \tilde{u}_k < \operatorname{tg} \tilde{v}_k$. Да положим

$$n_k = \nu(2a_k + d_k, 2b_k + e_k, c_{k+1}, a_k + 2d_k, b_k + 2e_k)$$

(дясната страна на това равенство има смисъл благодарение на току-що отбелязаното неравенство и изразите за $\tilde{u}_k$ и $\tilde{v}_k$). Налице е точно един от следните четири случая:

1. $|\tau(2a_k + d_k, 2b_k + e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k)| \ge \dfrac{2}{n+1}$.
   (а) $\tau(2a_k + d_k, 2b_k + e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k) > 0$.
   (б) $\tau(2a_k + d_k, 2b_k + e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k) < 0$.

2. $|\tau(2a_k + d_k, 2b_k + e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k)| < \dfrac{2}{n+1}$,
   $|\tau(a_k + 2d_k, b_k + 2e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k)| \ge \dfrac{2}{n+1}$.
   (а) $\tau(a_k + 2d_k, b_k + 2e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k) > 0$.
   (б) $\tau(a_k + 2d_k, b_k + 2e_k, c_{k+1}, n_k) - \varphi(n_k) < 0$.

В случая 1.(а) е изпълнено неравенството $\operatorname{tg}\tilde{u}_k > \xi$ и е подходящо да имаме $u_{k+1} = u_k$, $v_{k+1} = \tilde{u}_k$. Постигаме това, като положим

$$a_{k+1} = 3a_k,\ b_{k+1} = 3b_k,\ d_{k+1} = 2a_k + d_k,\ e_{k+1} = 2b_k + e_k.$$

В случая 1.(б) е изпълнено неравенството $\operatorname{tg}\tilde{u}_k < \xi$ и е подходящо да имаме $u_{k+1} = \tilde{u}_k$, $v_{k+1} = v_k$. Постигаме това, като положим

$$a_{k+1} = 2a_k + d_k,\ b_{k+1} = 2b_k + e_k,\ d_{k+1} = 3d_k,\ e_{k+1} = 3e_k.$$

В случая 2.(а) е изпълнено неравенството $\operatorname{tg}\tilde{v}_k > \xi$ и е подходящо да имаме $u_{k+1} = u_k$, $v_{k+1} = \tilde{v}_k$. Постигаме това, като положим

$$a_{k+1} = 3a_k,\ b_{k+1} = 3b_k,\ d_{k+1} = a_k + 2d_k,\ e_{k+1} = b_k + 2e_k.$$

В случая 2.(б) е изпълнено неравенството $\operatorname{tg}\tilde{v}_k < \xi$ и е подходящо да имаме $u_{k+1} = \tilde{v}_k$, $v_{k+1} = v_k$. Постигаме това, като положим

$$a_{k+1} = a_k + 2d_k,\ b_{k+1} = b_k + 2e_k,\ d_{k+1} = 3d_k,\ e_{k+1} = 3e_k.$$

От дадената индуктивна дефиниция следва, че

$$v_k - u_k \le \left(\frac{2}{3}\right)^k (v_0 - u_0) < \left(\frac{2}{3}\right)^k \pi$$

за всяко k от $\mathbb{N}$. Поради това съществува точно едно реално число η със свойството, че $u_k \le \eta \le v_k$ за всяко k от $\mathbb{N}$, и това число е граница както на редицата с общ член u_k, така и на редицата с общ член v_k. Разбира се, имаме неравенствата $-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$, а като извършим граничен преход в неравенствата $\operatorname{tg} u_k < \xi < \operatorname{tg} v_k$, заключаваме, че $\operatorname{tg}\eta = \xi$. Следователно $\eta = \operatorname{arctg}\xi$.

Лесно се вижда, че при подходящ избор на естественото число s ще имаме неравенството

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+s} \pi < \frac{2}{n+1}$$

за всяко n от $\mathbb{N}$ (това е така, защото редицата с общ член $\left(\frac{2}{3}\right)^n (n+1)$ е ограничена). Нека s е избрано по такъв начин. Тогава за всяко n от $\mathbb{N}$ ще имаме

$$\left|\frac{1}{2}(u_{n+s} + v_{n+s}) - \eta\right| \le \frac{1}{2}(v_{n+s} - u_{n+s}) < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+s} \pi < \frac{1}{n+1}.$$

Тъй като

$$\frac{1}{2}(u_{n+s} + v_{n+s}) = \frac{(a_{n+s} + d_{n+s}) - (b_{n+s} + e_{n+s})}{2c_{n+s} + 2},$$

ще получим едно представяне (ψ_1, ψ_2, ψ_3) от желания вид на числото η, ако дефинираме функциите ψ_1, ψ_2, ψ_3 от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ чрез равенствата

$$\psi_1(n) = a_{n+s} + d_{n+s}, \quad \psi_2(n) = b_{n+s} + e_{n+s}, \quad \psi_3(n) = 2c_{n+s} + 1.$$