Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации

Ще докажем две теореми, които характеризират изчислимостта на реални числа и на реални функции по начин, неизползващ номерации на множествата $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{Q}^3$, ...

Дефиниция 1. Ако ξ е реално число, то под *стандартно апроксимираща редица за* ξ ще разбираме такава функция θ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$, че за всяко естествено число i да е в сила неравенството

$$|\theta(i) - \xi| < \frac{1}{i+1}.$$

Пример 1. Ако ξ е рационално число, то константната функция с дефиниционна област $\mathbb{N}$ и стойност ξ е стандартно апроксимираща редица за ξ.

Пример 2. Ако ξ е неотрицателно реално число, а t е функция от $\mathbb{T}$, която представя ξ в смисъл на Гжегорчик, то функцията $\lambda i.\dfrac{t(i)}{i+1}$ е стандартно апроксимираща редица за ξ.

Пример 3. От равенството

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

следва, че функцията

$$\lambda i.\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

е стандартно апроксимираща редица за числото $\ln 2$.

Теорема 1. За да бъде едно реално число ξ изчислимо, необходимо и достатъчно е да съществува рекурсивна стандартно апроксимираща редица за ξ.

Доказателство. Ще използваме при $\tau = \alpha_1$ и $\Theta = \lambda jkl.\dfrac{j-k}{l+1}$ точка (b) на Лема 2 от текста „Рекурсивни номерации на дискретно параметризирани множества“. Нека ξ е произволно реално число. За да докажем необходимостта, да предположим, че ξ е изчислимо. Тогава за някоя рекурсивна функция s от $\mathbb{T}$ ще имаме равенството $\xi = \nu_{\mathbf{R}_1}(s)$, т.е. съществува такава рекурсивна функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, че

$$d_1(\alpha_1(s(i)), \xi) = |\alpha_1(s(i)) - \xi| < \frac{1}{i+1} \tag{1}$$

за всяко i от $\mathbb{N}$. Ако при такъв избор на s дефинираме функция θ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$ чрез полагането $\theta(i) = \alpha_1(s(i))$, то θ ще бъде рекурсивна стандартно апроксимираща редица за ξ. За доказателството на достатъчността, да предположим, че θ е рекурсивна стандартно апроксимираща редица за ξ. Тогава $\theta = \lambda i.\alpha_1(s(i))$ при някой избор на рекурсивна функция s от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и функцията s ще удовлетворява условието (1) за всяко i от $\mathbb{N}$. При такъв избор на s ще имаме равенството $\xi = \nu_{\mathbf{R}_1}(s)$ и следователно числото ξ е изчислимо. $\square$

Следствие. За да бъде едно реално число ξ изчислимо, необходимо и достатъчно е да съществуват такива рекурсивни функции f, g и h от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че за всяко i от $\mathbb{N}$ да е в сила неравенството

$$\left| \frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{i+1}.$$

Дефиниция 2. Нека $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ е множеството на всички изображения на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$, N е положително цяло число и Δ е частично изображение на $\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right)^N$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Ще казваме, че изображението Δ е *ефективно*, ако съществуват такива μ-рекурсивни функционали F, G и H от $\mathcal{F}_{3N,1}$, че

$$\begin{aligned}\Delta \left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1}, \ldots, \lambda k.\frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k) + 1} \right)& \\ = \lambda i.\frac{F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i) - G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i)}{H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i) + 1}&\end{aligned}$$

всеки път, когато $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ са функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и

$$\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1}, \ldots, \lambda k.\frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k) + 1} \right) \in \mathrm{dom}(\Delta).$$

Пример 4. Нека φ е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и нека Δ е изображението на $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, дефинирано чрез равенството $\Delta(\theta) = \lambda i.\theta(\varphi(i))$. Изображението Δ е ефективно, защото имаме равенството

$$\Delta \left(\lambda k.\frac{f(k) - g(k)}{h(k) + 1} \right) = \lambda i.\frac{f(\varphi(i)) - g(\varphi(i))}{h(\varphi(i)) + 1}$$

всеки път, когато f, g и h са функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$.

Теорема 2. Нека Φ е частична функция от $\mathbb{R}^N$ към $\mathbb{R}$, където N е положително цяло число. За да бъде тя изчислима, необходимо и достатъчно е да съществува такова ефективно частично изображение Δ на $\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right)^N$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, че $(\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathrm{dom}(\Delta)$ и $\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ е стандартно апроксимираща редица за $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ всеки път, когато $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ и $\theta_1, \ldots, \theta_N$ са стандартно апроксимиращи редици съответно за $\xi_1, \ldots, \xi_N$.

Доказателство. За доказателството на необходимостта да предположим, че функцията Φ е изчислима, т.е. че тя притежава изчислима $(\nu_{\mathbf{R}_N}, \nu_{\mathbf{R}_1})$-реализация. Нека Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който е продължение на последната. Тогава $\Gamma(s) \in \mathrm{dom}(\nu_{\mathbf{R}_1})$ и $\nu_{\mathbf{R}_1}(\Gamma(s)) = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при всеки избор на точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ от дефиниционната област на Φ и на функция s от $\mathrm{dom}(\nu_{\mathbf{R}_N})$, за която $\nu_{\mathbf{R}_N}(s) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Частичното изображение Δ определяме по следния начин:

1. В качеството на $\mathrm{dom}(\Delta)$ вземаме множеството на онези $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ от $\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right)^N$, за които съществува точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ от $\mathrm{dom}(\Phi)$ със свойството $\theta_1, \ldots, \theta_N$ да са стандартно апроксимиращи редици съответно за $\xi_1, \ldots, \xi_N$.

2. За произволен елемент $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ на $\mathrm{dom}(\Delta)$ полагаме

   $$\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \lambda i.\alpha_1(\Gamma(s)(i)),$$

   където s е функцията от $\mathbb{T}$, определена чрез равенството

   $$s(k) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \alpha_N(l) = (\theta_1(k), \ldots, \theta_N(k))\}.$$

Очевидно свойството, формулирано в точка 1, $\theta_1, \ldots, \theta_N$ да са стандартно апроксимиращи редици съответно за $\xi_1, \ldots, \xi_N$ е равносилно с изискването за всяко k от $\mathbb{N}$ да е в сила неравенството

$$d_N((\theta_1(k), \ldots, \theta_N(k)), (\xi_1, \ldots, \xi_n)) < \frac{1}{k+1}.$$

Оттук и от обстоятелството, че Γ е продължение на $(\nu_{\mathbf{R}_N}, \nu_{\mathbf{R}_1})$-реализация на функцията Φ, следва, че винаги, когато $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ и $\theta_1, \ldots, \theta_N$ са стандартно апроксимиращи редици съответно за $\xi_1, \ldots, \xi_N$, функцията $\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ е стандартно апроксимираща редица за $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Остава да се убедим, че изображението Δ е ефективно. За целта да предположим временно, че $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ са функции от $\mathbb{T}$ и

$$\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1}, \ldots, \lambda k.\frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k) + 1}\right) \in \mathrm{dom}(\Delta). \tag{2}$$

Тогава

$$\Delta\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1}, \ldots, \lambda k.\frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k) + 1}\right) = \lambda i.\alpha_1(\Gamma(s)(i)),$$

където s е функцията от $\mathbb{T}$, определена чрез равенството

$$s(k) = \min\left\{ l \in \mathbb{N} \;\middle|\; \alpha_N(l) = \left(\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k)+1}, \ldots, \frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k)+1} \right) \right\}.$$

Като използваме рекурсивността на номерацията α_N, оттук лесно виждаме съществуването на такъв μ-рекурсивен функционал E от $\mathcal{F}_{3N,1}$, че

$$\Delta\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k)+1}, \ldots, \lambda k.\frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k)+1} \right) \\ = \lambda i.\alpha_1(E(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i))$$

винаги, когато $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ са функции от $\mathbb{T}$, удовлетворяващи условието (2). От друга страна пък от рекурсивността на номерацията α_1 следва съществуването на такива μ-рекурсивни функционали F, G и H от $\mathcal{F}_{3N,1}$, че

$$\alpha_1(E(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i)) \\ = \frac{F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i) - G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i)}{H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N, i) + 1} \quad (3)$$

при всеки избор на $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ в $\mathbb{T}$ и на i в $\mathbb{N}$.

За доказателството на достатъчността да предположим, че Δ е ефективно частично изображение на $\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right)^N$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ с формулираното в теоремата свойство. Нека F, G и H са μ-рекурсивни функционали от $\mathcal{F}_{3N,1}$, свидетелстващи за ефективността на Δ по начина от дефиницията. Да предположим временно, че $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ и s е функция от $\mathbb{T}$, за която $\nu_{\mathbf{R}_N}(s) = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Тогава функциите $\theta_1, \ldots, \theta_N$ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$, определени чрез равенството

$$\alpha_N(s(k)) = (\theta_1(k), \ldots, \theta_N(k)), \quad (4)$$

ще бъдат стандартно апроксимиращи редици съответно за $\xi_1, \ldots, \xi_N$, следователно $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ ще принадлежи на $\mathrm{dom}(\Delta)$ и функцията $\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ ще бъде стандартно апроксимираща редица за $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Доказателството ще бъде завършено, ако покажем съществуването на такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че

$$\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \alpha_1(\Gamma(s))$$

винаги, когато $(\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathrm{dom}(\Delta)$, $s \in \mathbb{T}$ и за всяко k от $\mathbb{N}$ е в сила равенството (4). Това ще направим по следния начин. Първо забелязваме, че благодарение на рекурсивността на номерацията α_N съществуват $3N$ на брой μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, които преобразуват всяка функция s от $\mathbb{T}$ съответно във функции $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ от $\mathbb{T}$, удовлетворяващи за всяко k от $\mathbb{N}$ равенството

$$\alpha_N(s(k)) = \left(\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k)+1}, \ldots, \frac{f_N(k) - g_N(k)}{h_N(k)+1} \right).$$

От друга страна обаче рекурсивността на номерацията α_1 осигурява съществуването на μ-рекурсивен функционал E от $\mathcal{F}_{3N,1}$, удовлетворяващ условието (3) при всеки избор на функции $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N$ от $\mathbb{T}$ и на естествено число i. Нужният ни μ-рекурсивен оператор Γ се строи с помощта на μ-рекурсивния функционал E и споменатите по-горе $3N$ на брой μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, като се използва твърдение 3 от текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори" в съчетание с дефиницията за μ-рекурсивен оператор от същия текст. $\square$

Следствие. Нека Φ е частична функция от $\mathbb{R}^N$ към $\mathbb{R}$, където N е положително цяло число. За да бъде тя изчислима, необходимо и достатъчно е да съществуват такива μ-рекурсивни функционали F, G и H от $\mathcal{F}_{3N,1}$, че

$$\left|\frac{F(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)-G(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)}{H(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)+1}-\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_N)\right| < \frac{1}{i+1}$$

винаги, когато $(\xi_1,\ldots,\xi_N)\in\mathrm{dom}(\Phi)$, $f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N\in\mathbb{T}$, $i\in\mathbb{N}$ и

$$\left|\frac{f_1(k)-g_1(k)}{h_1(k)+1}-\xi_1\right|<\frac{1}{k+1},\ \ldots,\ \left|\frac{f_N(k)-g_N(k)}{h_N(k)+1}-\xi_N\right|<\frac{1}{k+1} \qquad (5)$$

за всяко $k\in\mathbb{N}$.

Доказателство. Необходимостта следва от горната теорема и дефиниция 2 по очевиден начин. При доказателството на достатъчността използваме още и функциите a, b и c от $\mathbb{Q}$ към $\mathbb{N}$, определени с условието, че за всяко y от $\mathbb{Q}$ е в сила равенството

$$y=\frac{a(y)-b(y)}{c(y)+1},$$

като поне едно от числата $a(y)$ и $b(y)$ е 0, а стойността на $c(y)$ е най-малката възможна (последното е еквивалентно с изискването да не съществува естествено число, различно от 1, което да е общ делител на целите числа $a(y)-b(y)$ и $c(y)+1$). С помощта на тези функции дефинираме изображението Δ така:

$$\Delta(\theta_1,\ldots,\theta_N) = \lambda i.\frac{F(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)-G(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)}{H(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N,i)+1},$$

където

$$f_n=\lambda k.a(\theta_n(k)),\ g_n=\lambda k.b(\theta_n(k)),\ h_n=\lambda k.c(\theta_n(k))$$

при $n=1,\ldots,N$ и се ограничаваме с онези $(\theta_1,\ldots,\theta_N)$, за които дефиниционната област на получаващата се по този начин съответна функция

$\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ е $\mathbb{N}$ (ефективността на изображението Δ е налице благодарение на обстоятелството, че функциите

$$\lambda jkl.a\left(\frac{j-k}{l+1}\right),\ \lambda jkl.b\left(\frac{j-k}{l+1}\right),\ \lambda jkl.c\left(\frac{j-k}{l+1}\right)$$

от $\mathbb{N}^3$ към $\mathbb{N}$ са рекурсивни). $\square$

Пример 5. Нека N и K са положителни цели числа, удовлетворяващи неравенствата $1 \leq K \leq N$ и нека $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез равенството

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \xi_K.$$

Функцията Φ е изчислима, защото

$$\left|\frac{f_K(i) - g_K(i)}{h_K(i) + 1} - \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_N)\right| < \frac{1}{i+1}$$

винаги, когато $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_N, g_N, h_N \in \mathbb{T}$, $i \in \mathbb{N}$ и за всяко $k \in \mathbb{N}$ са изпълнени неравенствата (5).

Пример 6. Функцията $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана чрез равенството

$$\Phi(\xi) = -\xi,$$

е изчислима, защото всеки път, когато $\xi \in \mathbb{R}$, f, g и h са функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{f(k) - g(k)}{h(k) + 1} - \xi\right| < \frac{1}{k+1}, \tag{6}$$

имаме

$$\left|\frac{g(i) - f(i)}{h(i) + 1} - \Phi(\xi)\right| = \left|-\frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1} + \xi\right| = \left|\frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1} - \xi\right| < \frac{1}{i+1}.$$

Пример 7. Функцията $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана чрез равенството

$$\Phi(\xi) = |\xi|,$$

е изчислима, защото всеки път, когато $\xi \in \mathbb{R}$, f, g и h са функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството (6), имаме

$$\left|\frac{|f(i) - g(i)| - 0}{h(i) + 1} - \Phi(\xi)\right| = \left|\left|\frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1}\right| - |\xi|\right| \leq \left|\frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1} - \xi\right| < \frac{1}{i+1}.$$