Ефективни метрични пространства и изчислимост в тях. Изчислимост на реални числа и реални функции

Метрика в едно множество X се нарича такава функция d от X^2 към $\mathbb{R}$, че при всеки избор на елементи x_1, x_2, x_3 на X да са в сила равенството $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$, неравенството $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ и еквивалентността $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (от тези изисквания лесно следва, че всички стойности на функцията d са неотрицателни). Важен пример за метрика в множеството $\mathbb{R}$ е функцията на две променливи d_1, дефинирана с равенството

$$d_1(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Тя е частен случай на метриката d_N в $\mathbb{R}^N$, която се дефинира с равенството

$$d_N((x_{11}, \ldots, x_{1N}), (x_{21}, \ldots, x_{2N})) = \max(|x_{11} - x_{21}|, \ldots, |x_{1N} - x_{2N}|).$$

Дефиниция 1. *Ефективно метрично пространство* ще наричаме всяка наредена тройка (X, d, α), където X е множество (*носител* на пространството), d е метрика в X и α е частична функция от $\mathbb{N}$ към X, на която множеството на стойностите е навсякъде гъсто в X относно d (т.е. за всяко x от X и всяко положително число δ съществува стойност y на α, за която $d(y, x) < \delta$).

Забележка 1. От горната дефиниция следва, че ако (X, d, α) е ефективно метрично пространство с безкраен носител, то съществува изброимо подмножество на X, което е навсякъде гъсто в X относно d, а ако (X, d, α) е ефективно метрично пространство с краен носител, то множеството на стойностите на α съвпада с X.

Забележка 2. Очевидно изискването в дефиницията α да е частична функция от $\mathbb{N}$ към X, на която множеството на стойностите е навсякъде гъсто в X относно d, е равносилно с това α да е номерация на някое подмножество на X, навсякъде гъсто в X относно d.

Пример 1. Ако α е номерация на множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, то тройката $(\mathbb{R}, d_1, \alpha)$ е ефективно метрично пространство.

Пример 2. По-общо, ако α е номерация на множеството $\mathbb{Q}^N$, то тройката $(\mathbb{R}^N, d_N, \alpha)$ е ефективно метрично пространство.

Забележка 3. Дадената по-горе дефиниция на понятието ефективно метрично пространство не е съществено различна от онази, която е възприета в книгата [2]. В статията [1] се използва доста по-ограничително понятие за ефективно метрично пространство – фактически се поставят допълнителните изисквания X да е пълно относно метриката d, α да е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}$ и множеството

$$\left\{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \;\middle|\; d(\alpha(i),\alpha(j)) < \frac{k}{l+1}\right\}$$

да е рекурсивно номеруемо (първото от тези допълнителни изисквания е изпълнено в условията на горните два примера, но за останалите две това зависи от избора на изображението α).

Дефиниция 2. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, а x е елемент на X. *Представяне* на x в $\mathbf{X}$ ще наричаме всяка функция $s : \mathbb{N} \to \mathrm{dom}(\alpha)$, за която

$$d(\alpha(s(i)), x) < \frac{1}{i+1}$$

при всеки избор на i в $\mathbb{N}$. Вместо да казваме, че дадена функция е представяне на x в $\mathbf{X}$, ще казваме също, че тя *представя* x в $\mathbf{X}$.

Пример 3. Ако $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, то за всяко $m \in \mathrm{dom}(\alpha)$ константната функция с дефиниционна област $\mathbb{N}$ и стойност m представя в $\mathbf{X}$ съответния елемент $\alpha(m)$.

Ако $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, то представянията в $\mathbf{X}$ на елементите на X са функции от $\mathbf{T}$ и очевидно е, че когато една такава функция представя в $\mathbf{X}$ някой елемент на X, този елемент е единствен. Благодарение на обстоятелството, че множеството на стойностите на α е навсякъде гъсто в X относно d, всеки елемент на X има представяне в $\mathbf{X}$. Поради това, ако на всяка функция от $\mathbf{T}$, която представя в $\mathbf{X}$ някой елемент на X, съпоставим този елемент, ще получим едно представяне на множеството X. Ще казваме за това представяне, че е *породено от* $\mathbf{X}$, и ще го означаваме с $\nu_{\mathbf{X}}$.

Дефиниция 3. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство. За един елемент на X ще казваме. че е $\mathbf{X}$-*изчислим*, ако той е $\nu_{\mathbf{X}}$-изчислим.

Пример 4. Ако $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, то всички елементи на $\mathrm{rng}(\alpha)$ са $\mathbf{X}$-изчислими. В частност, ако $\mathbf{X}$ има вида от пример 1, то всички рационални числа са $\mathbf{X}$-изчислими.

Дефиниция 4. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ и $\mathbf{Y} = (Y, e, \beta)$ са ефективни метрични пространства. За една частична функция от X към Y ще казваме, че е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-*изчислима*, ако тя е $(\nu_{\mathbf{X}}, \nu_{\mathbf{Y}})$-изчислима.

За въпросите за изчислимост на реални числа и реални функции ще бъдат от значение представянията на множествата от вида $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3, \ldots$ (в частност на множеството $\mathbb{R}$), породени от ефективни метрични пространства от вида $(\mathbb{R}^N, d_N, \alpha)$, където α е рекурсивна номерация на $\mathbb{Q}^N$. Оказва се, че при фиксирано положително цяло число N всеки две такива представяния са еквивалентни. Това (поради еквивалентността на всеки две рекурсивни номерации на $\mathbb{Q}^N$) е частен случай на теоремата, която сега ще формулираме и докажем.

Теорема 1. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ и $\mathbf{X}' = (X, d, \alpha')$ са ефективни метрични пространства, като функциите α и α' са еквивалентни номерации на едно и също подмножество на X. В такъв случай представянията $\nu_{\mathbf{X}}$ и $\nu_{\mathbf{X}'}$ на X също са еквивалентни.

Доказателство. Благодарение на еквивалентността на α и α' съществува такава частично рекурсивна функция на един аргумент φ, че $\mathrm{dom}(\alpha)$ се съдържа в $\mathrm{dom}(\varphi)$, стойностите на φ за числата от $\mathrm{dom}(\alpha)$ принадлежат на $\mathrm{dom}(\alpha')$ и за всяко $m \in \mathrm{dom}(\alpha)$ е изпълнено равенството $\alpha(m) = \alpha'(\varphi(m))$. Нека s е произволно представяне в $\mathbf{X}$ на някой елемент x на X. Тогава за произволно $k \in \mathbb{N}$, като използваме равенството $\alpha(s(i)) = \alpha'(\varphi(s(i)))$, получаваме неравенството

$$d(\alpha'(\varphi(s(i))), x) < \frac{1}{i+1}.$$

То показва, че функцията t от $\mathbf{T}$, определена чрез равенството $t(i) = \varphi(s(i))$, е представяне на x в $\mathbf{X}'$. Оттук става ясно, че съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, чиято рестрикция върху $\mathrm{dom}(\alpha)$ е (α, α')-реализация на тъждественото изображение на X в X. По аналогичен начин се вижда и съществуването на μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, чиято рестрикция върху $\mathrm{dom}(\alpha')$ е (α', α)-реализация на това изображение. $\square$

Да предположим, че за всяко положително цяло число N е избрана някоя рекурсивна номерация α_N на множеството $\mathbb{Q}^N$ и че $\mathbf{R}_N$ е ефективното метрично пространство $(\mathbb{R}^N, d_N, \alpha_N)$. Едно реално число ще наричаме *изчислимо*, ако то е $\mathbf{R}_1$-изчислимо. Една частична функция от $\mathbb{R}^N$ към $\mathbb{R}$ ще наричаме *изчислима*, ако тя е $(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1)$-изчислима. От доказаната преди малко теорема следва, че току-що въведените понятия за изчислимост не зависят от избора на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Забележка 4. В текста „Изчислимост относно именуващи системи“ нарекохме изчислими онези частични изображения на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, които имат в $\mathcal{F}_1$ частично рекурсивни продължения. Тъй като всяко частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, редно е да покажем, че за функциите от този специален вид въведеното по-горе понятие за изчислимост е еквивалентно с онова от споменатия текст. В разсъжденията, с които ще установим това, ще използваме следния факт, произтичащ от точка (a) на теорема 2 в текста „Рекурсивни номерации на дискретно параметризирани множества“: съществува такава рекурсивна функция h от $\mathbb{N}^3$ към $\mathbb{N}$, че при всеки избор на естествените числа j, k и l да бъде в сила равенството

$$\frac{j-k}{l+1} = \alpha_1(h(j,k,l)).$$

Ще използваме също, че при всеки избор на $q \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ е вярна импликацията

$$|q-n| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; n = \left\lfloor q + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

– тя е вярна, защото от нейната предпоставка следват неравенствата

$$n < q + \frac{1}{2} < n+1.$$

Да предположим първо, че γ е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, изчислимо в по-ранишния смисъл. Нека частично рекурсивната функция δ от $\mathcal{F}_1$ е продължение на γ. Да разгледаме произволна функция s от $\mathbb{T}$, която е представяне в $\mathbf{R}_1$ на дадено число x от дефиниционната област на γ. В сила е неравенството

$$|\alpha_1(s(1)) - x| < \frac{1}{2}$$

и следователно

$$\gamma(x) = \delta(x) = \delta\left(\left\lfloor \alpha_1(s(1)) + \frac{1}{2} \right\rfloor\right) = \alpha_1\left(h\left(\delta\left(\left\lfloor \alpha_1(s(1)) + \frac{1}{2} \right\rfloor\right), 0, 0\right)\right).$$

Това показва, че константната функция от $\mathbb{T}$ със стойност

$$\alpha_1\left(h\left(\delta\left(\left\lfloor \alpha_1(s(1)) + \frac{1}{2} \right\rfloor\right), 0, 0\right)\right) \tag{1}$$

е едно представяне в $\mathbf{R}_1$ на числото $\gamma(x)$. Значи ако на произволна функция s от $\mathbb{T}$ съпоставим константната функция от $\mathbb{T}$ със стойност (1), ще получим една $(\nu_{\mathbf{R}_1}, \nu_{\mathbf{R}_1})$-реализация на функцията γ, а лесно се вижда, че тази реализация е рестрикцията върху $\mathbb{T}$ на един μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$. С това е установено, че γ е изчислима реална функция в смисъла на настоящия текст. За да докажем обратната импликация, да предположим сега, че γ е изчислима реална функция в смисъла на настоящия текст. Нека φ е нейна изчислима $(\nu_{\mathbf{R}_1}, \nu_{\mathbf{R}_1})$-реализация. За произволно x от дефиниционната област на γ константната функция $\lambda i.h(x,0,0)$ от $\mathbb{T}$ е представяне на x в $\mathbf{R}_1$ и следователно $\varphi(\lambda i.h(x,0,0))$ е функция от $\mathbb{T}$, която е представяне на числото $\gamma(x)$ в $\mathbf{R}_1$. Значи за всяко $x \in \mathrm{dom}(\gamma)$ ще бъде в сила неравенството

$$|\varphi(\lambda i.h(x,0,0))(1) - \gamma(x)| < \frac{1}{2},$$

а от него следва равенството

$$\gamma(x) = \left\lfloor \varphi(\lambda i.h(x,0,0))(1) + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Тъй като съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който е продължение на φ, от горното равенство може да се заключи, че функцията γ има частично рекурсивно продължение.

Литература

[1] Hemmerling, A. Effective metric spaces and representations of the reals. Theoretical Computer Science, **284** (2002), 347–372.
Препринт е достъпен от страницата на адрес
`http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.8.8936`

[2] Weihrauch, K. Computable Analysis. An Introduction. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2000.
Две глави от книгата са достъпни от страницата на адрес
`http://www.fernuni-hagen.de/weihrauch/index_data/book.html`