Еквивалентност на именуващи системи

Две именуващи системи ν_1 и ν_2 за дадено множество M ще наричаме *еквивалентни*, ако тъждественото изображение на M в себе си е както (ν_1, ν_2)-изчислимо, така и (ν_2, ν_1)-изчислимо. Това изискване, разбира се, означава съществуване на (ν_1, ν_2)-изчислима и на (ν_2, ν_1)-изчислима реализация на въпросното тъждествено изображение, т.е. на изчислимо изображение φ_1 на $\mathrm{dom}(\nu_1)$ в $\mathrm{dom}(\nu_2)$ със свойството, че $\nu_1(s) = \nu_2(\varphi_1(s))$ за всяко s от $\mathrm{dom}(\nu_1)$, и на изчислимо изображение φ_2 на $\mathrm{dom}(\nu_2)$ в $\mathrm{dom}(\nu_1)$ със свойството, че $\nu_2(t) = \nu_1(\varphi_2(t))$ за всяко t от $\mathrm{dom}(\nu_2)$.

Пример 1. Да се условим да казваме, че една функция s от $\mathbb{T}$ *представя в модифициран смисъл на Гржегорчик* дадено реално число ξ, ако за всяко k от $\mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$\left|\frac{s(k)}{2^k} - \xi\right| < \frac{1}{2^k}.$$

Пак е налице единственост и неотрицателност на числото, което се представя, в случай, че такова число съществува. Ако на всяка функция от $\mathbb{T}$, която представя в модифициран смисъл на Гржегорчик някое реално число, поставим в съответствие това число, получаваме отново едно представяне на множеството на неотрицателните реални числа. Ще покажем, че това представяне е еквивалентно на представянето на Гжегорчик. Едната от двете нужни за това изчислими реализации на тъждественото изображение на множеството на неотрицателните реални числа в себе си получаваме чрез следната забележка: ако функцията t от $\mathbb{T}$ представя дадено реално число в смисъл на Гжегорчик, то функцията $\lambda i.t(2^i - 1)$ представя същото число в модифициран смисъл на Гжегорчик, при това съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който преобразува всяка функция t от $\mathbb{T}$ във функцията $\lambda i.t(2^i - 1)$. Намирането на другата от двете реализации изисква малко повече грижи. Да предположим, че една функция s от $\mathbb{T}$ представя в модифициран смисъл на Гржегорчик дадено реално число ξ. Ще търсим функция t от $\mathbb{T}$, която да представя ξ в смисъл на Гжегорчик, т.е. при всеки избор на естественото число i да имаме неравенството

$$\left|\frac{t(i)}{i+1} - \xi\right| < \frac{1}{i+1}.$$

Това неравенство е еквивалентно на неравенството $|t(i) - (i+1)\xi| < 1$ и поради това може да бъде удовлетворено, като първо се намери неотрицателно рационално число a, за което $|a - (i+1)\xi| < \frac{1}{2}$, а след това в качеството на $t(i)$ се вземе естествено число, отличаващо се от a с не повече от $\frac{1}{2}$ (лесно се вижда, че

$$\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

е едно такова естествено число). Търсенето на a може да се осъществи, като се използва, че за всяко k от $\mathbb{N}$ имаме

$$\left| (i+1)\frac{s(k)}{2^k} - (i+1)\xi \right| < \frac{i+1}{2^k}.$$

Понеже при $k = i+1$ дясната страна на последното неравенство не надминава $\frac{1}{2}$, в качеството на a можем да вземем числото $(i+1)\frac{s(i+1)}{2^{i+1}}$. Това води до следната стойност на $t(i)$:

$$t(i) = \left\lfloor (i+1)\frac{s(i+1)}{2^{i+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Тъй като съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който преобразува всяка функция s от $\mathbb{T}$ във функцията t, дефинирана чрез горното равенство, с това и втората от двете нужни реализации е намерена.

Пример 2. Нека b е цяло число, по-голямо от 1. Да се условим да казваме, че една функция t от $\mathbb{T}$ *представя в бройна система с основа* b дадено реално число ξ, ако $t(i) < b$ при $i = 1, 2, 3, \ldots$ и е в сила равенството

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t(i)}{b^i}.$$

Ако на всяка функция от $\mathbb{T}$, която представя в бройна система с основа b някое реално число, поставим в съответствие това число, получаваме едно представяне на множеството на неотрицателните реални числа. Ще наричаме това представяне b-*ично* и ще го означаваме с ρ_b. Ще покажем, че ρ_b не е еквивалентно на представянето на Гжегорчик. Да допуснем противното. В такъв случай ще съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато една функция s от $\mathbb{T}$ представя в смисъл на Гжегорчик дадено реално число, функцията $\Gamma(s)$ представя същото число в бройна система с основа b. Да използваме това за функцията $s_0 = \lambda i.i + 1$. Тъй като тя представя в смисъл на Гжегорчик числото 1, съответната функция $t_0 = \Gamma(s_0)$ ще представя това число в бройна система с основа b и следователно $t_0(0)$ ще бъде някое от двете числа 0 и 1. Операторът Γ обаче е непрекъснат, а множеството $\{t \in \mathcal{F}_1 \mid t(0) = t_0(0)\}$ е отворено. Понеже $\Gamma(s_0)$ принадлежи на това множество, ще съществува такава функция v от $\mathcal{F}_1$ с крайна дефиниционна област, че $s_0 \in \mathcal{O}_v$ и $\Gamma(s) \in \{t \in \mathcal{F}_1 \mid t(0) = t_0(0)\}$ за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$, т.е. $\Gamma(s)(0) = t_0(0)$ за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$. Ще видим, че това води до противоречие както в случая, когато $t_0(0) = 0$, така и в случая, когато $t_0(0) = 1$. Да предположим първо, че $t_0(0) = 0$. Тогава

$\Gamma(s)(0) = 0$ за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$. Нека m е естествено число, по-голямо от всички числа от $\mathrm{dom}(v)$. Лесно се вижда, че съществува функция s от $\mathbb{T}$, която представя в смисъл на Гжегорчик числото

$$1 + \frac{1}{m+1} \tag{1}$$

и съвпада с s_0 за числата, по-малки от m (достатъчно е да вземем каква да е функция от $\mathbb{T}$, която представя (1) в смисъл на Гжегорчик, и да заменим за всяко $i < m$ съответната ѝ стойност с $i+1$). Тази функция s ще принадлежи на $\mathcal{O}_v$, защото $s_0 \in \mathcal{O}_v$ и $\mathcal{O}_v$ се състои от функциите от $\mathcal{F}_1$, които са продължения на v. Оттук следва, че $\Gamma(s)(0) = 0$ и значи не е възможно $\Gamma(s)$ да представя в бройна система с основа b едно число, по-голямо от 1, каквото е числото (1). Да предположим сега, че $t_0(0) = 1$. Тогава $\Gamma(s)(0) = 1$ за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$. Отново нека m е естествено число, по-голямо от всички числа от $\mathrm{dom}(v)$. Този път ще използваме, че съществува функция s от $\mathbb{T}$, която представя в смисъл на Гжегорчик числото

$$1 - \frac{1}{m+1} \tag{2}$$

и съвпада с s_0 за числата, по-малки от m (можем да вземем каква да е функция от $\mathbb{T}$, която представя (2) в смисъл на Гжегорчик, и да заменим за всяко $i < m$ съответната ѝ стойност с $i+1$). Както преди малко се вижда, че тази функция s ще принадлежи на $\mathcal{O}_v$. Оттук следва, че $\Gamma(s)(0) = 1$ и значи не е възможно $\Gamma(s)$ да представя в бройна система с основа b едно число, по-малко от 1, каквото е числото (2).

Пример 3. Ще покажем, че представянията ρ_2 и ρ_{16} са еквивалентни (по подобен начин може по-общо да се установи еквивалентността на ρ_2 и ρ_{2^n} за всяко цяло число n, по-голямо от 1). Изчислима (ρ_2, ρ_{16})-реализация на тъждественото изображение на множеството на неотрицателните реални числа в себе си се получава въз основа на това, че ако една функция s от $\mathbb{T}$ представя дадено реално число в двоична бройна система, то същото число се представя в 16-ична бройна система от функцията t, дефинирана чрез равенството $t(0) = s(0)$ и равенствата

$$t(j) = 8s(4j-3) + 4s(4j-2) + 2s(4j-1) + s(4j), \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Изчислима (ρ_{16}, ρ_2)-реализация на същото изображение се получава пък въз основа на обстоятелството, че ако една функция t от $\mathbb{T}$ представя дадено реално число в 16-ична бройна система, то същото число се представя в двоична бройна система от функцията s, дефинирана чрез равенството $s(0) = t(0)$ и равенствата

$$s(4j-3) = \left\lfloor \frac{t(j)}{8} \right\rfloor, \; s(4j-2) = \left\lfloor \frac{t(j)}{4} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{t(j)}{8} \right\rfloor,$$
$$s(4j-1) = \left\lfloor \frac{t(j)}{2} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{t(j)}{4} \right\rfloor, \; s(4j) = t(j) - 2\left\lfloor \frac{t(j)}{2} \right\rfloor, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно отношението еквивалентност между именуващи системи за дадено множество е симетрично по силата на самата си дефиниция. От твърдение 3 в текста „Изчислимост относно именуващи системи“ е ясно, че това отношение е рефлексивно, а от твърдение 4 във въпросния текст – че то е и транзитивно. Пак от твърдение 4 следва, че при произволни именуващи системи ν_1 и ν_2 съвкупността на (ν_1, ν_2)-изчислимите частични изображения на $\mathrm{rng}(\nu_1)$ в $\mathrm{rng}(\nu_2)$ не се променя, ако заменим именуващите системи ν_1 и ν_2 с техни еквивалентни. Ще използваме последното свойство в следващия пример.

Пример 4. Нека b е цяло число, по-голямо от 1, което не е степен на 2 с цял показател. Ще покажем, че представянията ρ_2 и ρ_b не са еквивалентни, като докажем, че функцията f в множеството на неотрицателните реални числа, дефинирана чрез равенството $f(\xi) = b\xi$, е (ρ_b, ρ_b)-изчислима, но не е (ρ_2, ρ_2)-изчислима. Това, че f е (ρ_b, ρ_b)-изчислима, е видно от обстоятелството, че винаги, когато една функция s от $\mathbb{T}$ представя дадено число ξ в b-ична бройна система, числото $b\xi$ се представя в b-ична бройна система от функцията t, дефинирана чрез равенството $t(0) = bs(0) + s(1)$ и равенствата $t(j) = s(j+1)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Да допуснем сега, че функцията f е (ρ_2, ρ_2)-изчислима. Тогава ще съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато една функция s от $\mathbb{T}$ представя дадено число ξ в двоична бройна система, функцията $\Gamma(s)$ представя $b\xi$ в двоична бройна система. Разглеждаме функция s_0 от $\mathbb{T}$, която представя в двоична бройна система числото $\frac{1}{b}$. Нека $t_0 = \Gamma(s_0)$. Тъй като t_0 представя в двоична бройна система числото 1, може да се твърди, че $t_0(0)$ е някое от числата 0 и 1. От непрекъснатостта на оператора Γ следва съществуването на такава функция v от $\mathcal{F}_1$ с крайна дефиниционна област, че $s_0 \in \mathcal{O}_v$ и $\Gamma(s)(0) = t_0(0)$ за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$. Ще видим, че това води до противоречие както в случая, когато $t_0(0) = 0$, така и в случая, когато $t_0(0) = 1$. Нека m е горна граница на $\mathrm{dom}(v)$. Поради направеното предположение за числото b, функцията s_0 приема както стойността 1, така и стойността 0, за безбройно много стойности на аргумента си, а значи и за такива, които са по-големи от m. Да предположим първо, че $t_0(0) = 0$. Нека s е функция от $\mathbb{T}$, която се отличава от s_0 само по това, че приема стойност 0 за някоя стойност на аргумента си, по-голяма от m, за която s_0 приема стойност 1. Тогава s представя в двоична бройна система някое положително реално число, по-малко от $\frac{1}{b}$, и следователно $\Gamma(s)$ ще представя в двоична бройна система някое число, по-голямо от 1. Това обаче е невъзможно, защото $s \in \mathcal{O}_v$ и поради това $\Gamma(s)(0) = t_0(0) = 0$. Да предположим сега, че $t_0(0) = 1$. Нека s е функция от $\mathbb{T}$, която се отличава от s_0 само по това, че приема стойност 1 за някоя стойност на аргумента си, по-голяма от m, за която s_0 приема стойност 0. Тогава s представя в двоична бройна система някое реално число, по-голямо от $\frac{1}{b}$, и следователно $\Gamma(s)$ ще представя в двоична бройна система някое число, по-малко от 1. Това обаче е невъзможно, защото $s \in \mathcal{O}_v$ и поради това $\Gamma(s)(0) = t_0(0) = 1$.

Пример 5. Това, че представянията ρ_2 и ρ_b не са еквивалентни при предположението на пример 4, означава, че тогава тъждественото изображение на множеството на неотрицателните реални числа в себе си не може да е едновременно (ρ_2, ρ_b)-изчислимо и (ρ_b, ρ_2)-изчислимо. Ще усилим това твърдение, като покажем, че при въпросното предположение споменатото изображение не е (ρ_2, ρ_b)-изчислимо. Да допуснем, че за някое цяло число b, което е по-голямо от 1 и не е степен на 2 с целочислен показател, тъждественото изображение на множеството на неотрицателните реални числа в себе си е (ρ_2, ρ_b)-изчислимо. Тогава ще съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато една функция s от $\mathbb{T}$ представя дадено число в двоична бройна система, функцията $\Gamma(s)$ представя същото число в бройна система с основа b. Ще получим противоречие с помощта на разсъждения, близки до онези в пример 4. А именно, отново ще разгледаме функция s_0 от $\mathbb{T}$, която представя в двоична бройна система числото $\frac{1}{b}$. За функцията $t_0 = \Gamma(s_0)$ сега ще може да се твърди, че представя същото число в бройна система с основа b, а оттук следва, че $t_0(0) = 0$, а $t_0(1)$ е някое от числата 0 и 1. От непрекъснатостта на оператора Γ следва съществуването на такава функция v от $\mathcal{F}_1$ с крайна дефиниционна област, че $s_0 \in \mathcal{O}_v$ и за всяка функция s от $\mathcal{O}_v$ са верни равенствата $\Gamma(s)(0) = t_0(0)$, $\Gamma(s)(1) = t_0(1)$. С леки изменения в разсъжденията от пример 4 това довежда до противоречие както в случая, когато $t_0(1) = 0$, така и в случая, когато $t_0(1) = 1$. Основната промяна е в това, че за разглежданите в тези два случая функции s съответните функции $\Gamma(s)$ сега представят в бройна система с основа b същите числа, които функциите s представят в двоична бройна система (това обстоятелство всъщност улеснява получаването на противоречие).

Забележка. Може да се докаже, че ако b_1 и b_2 са цели числа, по-големи от 1, то представянията ρ_{b_1} и ρ_{b_2} са еквивалентни точно тогава, когато числата b_1 и b_2 имат едни и същи прости делители.

От твърдение 5 в текста „Изчислимост относно именуващи системи“ следва, че ако ν_1 и ν_2 са еквивалентни представяния на дадено множество, то ν_1-изчислимите елементи и ν_2-изчислимите елементи са едни и същи. Може обаче две представяния на едно множество да не са еквивалентни, а въпреки това съответните изчислими елементи да са едни и същи. Именно такова се оказва положението при двойките представяния в пример 2 и в пример 4.