μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори

И този текст както предходния съдържа сведения от теорията на изчислимостта, които ще се използват по-нататък. Припомняме, че се условихме да означаваме с $\mathbb{N}$ множеството $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ на естествените числа, а с $\mathcal{F}_k$ при $k \in \mathbb{N}$ – множеството на всички частични функции от $\mathbb{N}^k$ към $\mathbb{N}$.

При произволни m и k от $\mathbb{N}$ ще означаваме с $\mathcal{F}_{m,k}$ множеството на всички частични изображения на $\mathcal{F}_1^m \times \mathbb{N}^k$ в $\mathbb{N}$. Елементите на това множество ще наричаме *функционали с m аргумента в $\mathcal{F}_1$ и k числови аргумента*. Множеството $\mathcal{F}_{0,k}$ по същество съвпада с множеството $\mathcal{F}_k$. Ще обобщим за елементи на $\mathcal{F}_{m,k}$ понятието, въведено с дадената в началото на предходния текст дефиниция, но вместо термина частична рекурсивност ще използваме термина *μ-рекурсивност*, тъй като е прието да се наричат частично рекурсивни един клас елементи на $\mathcal{F}_{m,k}$, който при $m > 0$ е по-широк.[1] Дефиницията е пак индуктивна, като в нея и по-нататък $u_1, u_2, \ldots$ означават произволни елементи на $\mathcal{F}_1$, а $\bar{u}$ е съкратено означение на редицата $u_1, \ldots, u_m$:

0. При $1 \leq r \leq m$ функционалът $\lambda u_1 \ldots u_m x.u_r(x)$ е μ-рекурсивен.

1. При $1 \leq i \leq l$ функционалът $\lambda u_1 \ldots u_m x_1 \ldots x_l.x_i$ е μ-рекурсивен.

2. Функционалът $\lambda u_1 \ldots u_m x.x + 1$ е μ-рекурсивен.

3. Ако функционалът F_0 от $\mathcal{F}_{m,k}$ и функционалите $F_1, \ldots, F_k$ от $\mathcal{F}_{m,l}$ са μ-рекурсивни, то функционалът

$$\lambda u_1 \ldots u_m x_1 \ldots x_l.F_0(\bar{u}, F_1(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l), \ldots, F_k(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l))$$

също е μ-рекурсивен.

4. Ако функционалът F_0 от $\mathcal{F}_{m,l}$ и функционалът F_1 от $\mathcal{F}_{m,l+2}$ са μ-рекурсивни, то μ-рекурсивен е и функционалът F от $\mathcal{F}_{m,l+1}$, определен чрез равенствата

$$\begin{aligned} F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, 0) &= F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l), \\ F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t+1) &= F_1(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t, F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t)). \end{aligned}$$

[1] Понятието μ-рекурсивност е математическо уточнение на интуитивното понятие за изчислимост на един функционал чрез последователна изчислителна процедура, която в някои моменти може да изисква стойност на някоя от функциите-аргументи за някое конкретно число (в кои моменти, на коя от функциите и за кое число, това в общия случай се определя в хода на пресмятанията). Частичната рекурсивност на един функционал уточнява по-общото интуитивно понятие за изчислимостта му чрез паралелна изчислителна процедура от подобен вид. Доказва се, че всеки частично рекурсивен функционал съвпада с някой μ-рекурсивен, ако се допускат като аргументи само навсякъде дефинирани функции.

5. Ако функционалът F_0 от $\mathcal{F}_{m,l+1}$ е μ-рекурсивен, то функционалът

$$\lambda u_1 \ldots u_m x_1 \ldots x_l . \mu t[F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t) = 0]$$

също е μ-рекурсивен.

Ясно е, че μ-рекурсивните функционали от $\mathcal{F}_{0,k}$ по същество съвпадат с частично рекурсивните функции от $\mathcal{F}_k$.

Твърдение 1. Ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, то функционалът $\lambda u_1 \ldots u_m x_1 \ldots x_k . f(x_1, \ldots, x_k)$ е μ-рекурсивен.

Доказателство. Използваме точки 1–5 от горната дефиниция и индукция, съобразена с дадената в предходния текст дефиниция на понятието частично рекурсивна функция. □

Твърдение 2. Ако F е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{m,k}$, а $u_1, \ldots, u_m$ са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то функцията

$$\lambda x_1 \ldots x_k . F(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_k) \tag{1}$$

е частично рекурсивна.

Доказателство. Използваме индукция, съобразена с дефиницията на понятието μ-рекурсивен функционал. Ако функционалът F има вида от точка 0 от дефиницията, то функцията (1) съвпада с функцията u_r. В останалите случаи използваме съответните точки от дефиницията на понятието частично рекурсивна функция. □

От твърдение 2 очевидно следва такова обратно твърдение на твърдение 1: ако $f \in \mathcal{F}_k$ и функционалът $\lambda u_1 \ldots u_m x_1 \ldots x_k . f(x_1, \ldots, x_k)$ е μ-рекурсивен, то функцията f е частично рекурсивна.

Твърдение 2 допуска следното обобщение:

Твърдение 3. Ако F е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{m,k}$, $F_1, \ldots, F_m$ са μ-рекурсивни функционали от $\mathcal{F}_{n,l+1}$, а G е функционалът

$$\lambda u_1 \ldots u_n y_1 \ldots y_l x_1 \ldots x_k . F(\lambda t . F_1(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_l, t), \ldots, \\ \lambda t . F_m(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_l, t), x_1, \ldots, x_k),$$

то G също е μ-рекурсивен.[2]

[2]Като имаме предвид твърдение 1, виждаме, че твърдение 2 по същество съвпада с частния случай на твърдение 3, когато $n = l = 0$. Да отбележим, че по подобни съображения по-общият случай, когато $n = 0$, може да се разглежда като съвпадащ със следното твърдение: ако F е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{m,k}$, а $f_1, \ldots, f_m$ са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_{l+1}$, то функцията

$$\lambda y_1 \ldots y_l x_1 \ldots x_k . F(\lambda t . f_1(y_1, \ldots, y_l, t), \ldots, \lambda t . f_m(y_1, \ldots, y_l, t), x_1, \ldots, x_k)$$

е частично рекурсивна.

Доказателство. Разсъжденията са подобни на онези от доказателството на твърдение 2, като индукцията се провежда по отношение на функционала F (ако той има вида от точка 0 от дефиницията, то $G = F_r$). $\square$

В множеството $\mathcal{F}_1$ се дефинира топология, като на всяка функция v от $\mathcal{F}_1$, имаща крайна дефиниционна област, се съпостави множеството $\mathcal{O}_v$ на всички функции от $\mathcal{F}_1$, които са продължения на v. Тъй като сечението на всеки две множества от този вид е също множество от този вид или е празно, а $\mathcal{O}_v = \mathcal{F}_1$ при $\mathrm{dom}(v) = \varnothing$, фамилията на всички множества от въпросния вид е база на една топология в $\mathcal{F}_1$.[3] По аналогичен начин се установява, че фамилията на всички множества от вида $\mathcal{O}_{v_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{v_m}$, където $v_1, \ldots, v_m$ са функции от $\mathcal{F}_1$ с крайни дефиниционни области, е база на топология в $\mathcal{F}_1^m$. Оттук нататък *отворени множества* от елементи на $\mathcal{F}_1$ и такива от елементи на $\mathcal{F}_1^m$ ще наричаме множествата, принадлежащи съответно на първата и на втората от споменатите две топологии (първата е всъщност частен случай на втората, защото можем да отъждествим $\mathcal{F}_1$ с $\mathcal{F}_1^1$).

Теорема 1. Ако F е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{m,k}$, то при всеки избор на естествени числа $x_1, \ldots, x_k, y$ множеството

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \mid F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_k) = y\} \tag{2}$$

е отворено.

Доказателство. Ще използваме индукция, съобразена с дефиницията на понятието μ-рекурсивен функционал. Ако F има вида от точка 0 на дефиницията, то множеството (2) изглежда така:

$$\{(u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{F}_1^m \mid u_r(x) = y\},$$

където x и y са фиксирани естествени числа. Лесно се вижда обаче, че това множество съвпада с множеството $\mathcal{O}_{v_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{v_m}$, където функциите $v_1, \ldots, v_m$ са дефинирани както следва: v_r е функцията с дефиниционна област $\{x\}$ и стойност y в точката x, а v_s при $s \neq r$ е функцията с празна дефиниционна област. Ако F има вида от точка 1, то при дадени $x_1, \ldots, x_l, y$ множеството (2) е следното:

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \mid x_i = y\}.$$

При $x_i = y$ това е цялото $\mathcal{F}_1^m$, а при $x_i \neq y$ е празното множество. Случаят, когато F има вида от точка 2, е аналогичен.

Да предположим сега, че F има вида от точка 3 на дефиницията, като всеки от функционалите $F_0, F_1, \ldots, F_k$ има доказваното свойство. Тогава

[3] Условието една фамилия $\mathcal{B}$ от подмножества на дадено множество X да е база на топология в X е равносилно с изискването множеството X и всяко сечение на две множества от $\mathcal{B}$ да са представими като обединения на множества, принадлежащи на $\mathcal{B}$. Топологията с база $\mathcal{B}$ при това положение се състои от всички обединения на множества, принадлежащи на $\mathcal{B}$.

при произволен избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, y$ множеството (2) е следното:

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F_0(\bar{u}, F_1(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l), \ldots, F_k(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l)) = y\}. \tag{3}$$

При произволни $z_1, \ldots, z_l$ от $\mathbb{N}$ да положим

$$S_{z_1,\ldots,z_l} = \{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F_1(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l) = z_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_k(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l) = z_k \\ \&\, F_0(\bar{u}, z_1, \ldots, z_k) = y\}.$$

Множеството $S_{z_1,\ldots,z_l}$ е сечение на $k+1$ отворени множества и следователно е отворено. Тъй като множеството (3) е обединение на всички множества $S_{z_1,\ldots,z_l}$, получаващи се при $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{N}$, следва, че то също е отворено.

Преминаваме към случая, когато F има вида от точка 4 на дефиницията и всеки от функционалите F_0 и F_1 има доказаното свойство. При произволно избрани естествени числа $x_1, \ldots, x_l, t, y$ множеството (2) е следното:

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t) = y\}. \tag{4}$$

Доказателството, че то е отворено, ще извършим чрез индукция относно t. При $t = 0$ въпросното множество е

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l) = y\}.$$

и следователно е отворено. Да предположим, че при дадено t множеството (4) е отворено при всеки избор на $x_1, \ldots, x_l, y$. При дадени $x_1, \ldots, x_l, y$ и произволно z от $\mathbb{N}$ да положим

$$S_z = \{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t) = z \,\&\, F_1(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t, z) = y\}.$$

Множеството S_z е сечение на две отворени множества и следователно е отворено. Оттук, като използваме равенството

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t+1) = y\} = \bigcup_{z=0}^{\infty} S_z,$$

получаваме, че и множеството

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t+1) = y\}$$

е отворено.

Остава да разгледаме случая на функционал от вида от точка 5 при предположение, че функционалът F_0 има доказаното свойство. Тогава при произволни $x_1, \ldots, x_l, y$ множеството (2) е следното:

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, \mu t[F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t) = 0] = y\}. \tag{5}$$

За всяко естествено число z да положим

$$S_z = \bigcup_{r=1}^{\infty} \{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, z) = r\}.$$

Това множество е отворено, защото е обединение на отворени множества. Като използваме, че множеството (5) е сечение на отвореното множество

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \mid F_0(\bar{u}, x_1, \dots, x_l, y) = 0\}$$

и множествата S_z, съответстващи на естествените числа z, по-малки от y, получаваме, че и (5) е отворено. $\square$

На всеки функционал F от $\mathcal{F}_{m,k}$ да поставим в съответствие изображението Γ на $\mathcal{F}_1^m$ в $\mathcal{F}_k$, дефинирано с помощта на равенството

$$\Gamma(u_1, \dots, u_m) = \lambda x_1 \dots x_k . F(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_k).$$

Това изображение ще наричаме *оператор, съответен на функционала F*. Операторите, съответни на μ-рекурсивни функционали от $\mathcal{F}_{m,k}$ ще наричаме *μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$*.

Твърденията 1, 2 и 3 допускат непосредствено прередактиране за μ-рекурсивни оператори, а именно:

Твърдение 1°. Ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, то изображението $\lambda u_1 \dots u_m . f$ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$.

Твърдение 2°. Ако Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$, а $u_1, \dots, u_m$ са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то функцията $\Gamma(u_1, \dots, u_m)$ е частично рекурсивна.

Твърдение 3°. Ако Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ са μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^n$ към $\mathcal{F}_{l+1}$, то изображението

$$\begin{aligned}\lambda u_1 \dots u_n . \lambda y_1 \dots y_l x_1 \dots x_k . \Gamma(&\lambda t . \Gamma_1(u_1, \dots, u_n)(y_1, \dots, y_l, t), \dots, \\ &\lambda t . \Gamma_m(u_1, \dots, u_n)(y_1, \dots, y_l, t))(x_1, \dots, x_k)\end{aligned}$$

също е μ-рекурсивен оператор.[4]

При положение, че сме снабдили всяко от множествата $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_1^m$ с топология, има смисъл понятието непрекъснатост за изображенията на $\mathcal{F}_1^m$ в $\mathcal{F}_1$.

[4] Разбира се, като имаме предвид твърдение 1°, виждаме, че твърдение 2° по същество съвпада с частния случай на твърдение 3°, когато $n = l = 0$. По подобни съображения по-общият случай, когато $n = 0$, може да се разглежда като съвпадащ със следното твърдение: ако Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$, а $f_1, \dots, f_m$ са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_{l+1}$, то функцията

$$\lambda y_1 \dots y_l x_1 \dots x_k . \Gamma(\lambda t . f_1(y_1, \dots, y_l, t), \dots, \lambda t . f_m(y_1, \dots, y_l, t))(x_1, \dots, x_k)$$

е частично рекурсивна. Заслужава внимание и това, че случаят, когато $l = 0$, всъщност съвпада със следното твърдение: ако Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_k$, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ са μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^n$ към $\mathcal{F}_1$, то изображението

$$\lambda u_1 \dots u_n . \Gamma(\Gamma_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \Gamma_m(u_1, \dots, u_n))$$

също е μ-рекурсивен оператор.

Теорема 2. Всеки μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_1$ е непрекъснат.[5]

Доказателство. Нека Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1^m$ към $\mathcal{F}_1$. Ще докажем непрекъснатостта на Γ, като покажем, че за всяка функция v от $\mathcal{F}_1$, имаща крайна дефиниционна област, множеството $\Gamma^{-1}(\mathcal{O}_v)$ е отворено. За целта ще използваме, че $\Gamma^{-1}(\mathcal{O}_v)$ е сечение на множествата

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, \Gamma(\bar{u})(x) = v(x)\},$$

където $x \in \mathrm{dom}(v)$. Нека операторът Γ е съответен на μ-рекурсивния функционал F от $\mathcal{F}_{m,1}$. Тогава за всяко x от $\mathrm{dom}(v)$ имаме равенството

$$\Gamma(\bar{u})(x) = F(\bar{u}, x)$$

и значи

$$\{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, \Gamma(\bar{u})(x) = v(x)\} = \{\bar{u} \in \mathcal{F}_1^m \,|\, F(\bar{u}, x) = v(x)\}.$$

Оттук, като използваме теорема 1, виждаме, че множеството $\Gamma^{-1}(\mathcal{O}_v)$ е сечение на краен брой отворени множества и следователно е отворено. $\square$

[5] Теоремата остава вярна, ако в нейната формулировка заменим $\mathcal{F}_1$ с $\mathcal{F}_k$, при условие, че снабдим $\mathcal{F}_k$ с топология, аналогична на онази в $\mathcal{F}_1$.