Частично рекурсивни, рекурсивни и примитивно рекурсивни функции. Рекурсивни и рекурсивно номеруеми множества

Този текст съдържа някои сведения от теорията на изчислимостта, които ще се предполагат известни по-нататък.

Ще означаваме с $\mathbb{N}$ множеството $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ на естествените числа, а с $\mathcal{F}_k$ при $k \in \mathbb{N}$ – множеството на всички частични функции от $\mathbb{N}^k$ към $\mathbb{N}$. Някои такива функции ще посочваме с помощта на λ-означения, като за променливите в тези означения ще приемаме, че пробягват $\mathbb{N}$.

За една функция от $\mathcal{F}_k$ се казва, че е *алгоритмично изчислима*, ако съществува алгоритъм, преобразуващ всяка точка от дефиниционната ѝ област в съответната функционална стойност (подразбира се. че естествените числа се означават по някой от обичайните стандартни начини). Ако въпросният алгоритъм дава резултат само за онези точки от $\mathbb{N}^k$, които принадлежат на дефиниционната област на функцията, ще казваме, че тази функция е *алгоритмично изчислима в тесен смисъл на думата.*[1] Има няколко еквивалентни помежду си начина за уточняване на това интуитивно понятие. Един от тях е с помощта на понятието *частично рекурсивна функция.* То може да се въведе чрез следната индуктивна дефиниция:

1. При $1 \leq i \leq l$ функцията $\lambda x_1 \ldots x_l . x_i$ е частично рекурсивна.

2. Функцията $\lambda x . x + 1$ е частично рекурсивна.

3. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_k$ и функциите $f_1, \ldots, f_k$ от $\mathcal{F}_l$ са частично рекурсивни, то функцията

$$\lambda x_1 \ldots x_l . f_0(f_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_l)) \tag{1}$$

също е частично рекурсивна.

4. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_l$ и функцията f_1 от $\mathcal{F}_{l+2}$ са частично рекурсивни, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_{l+1}$, определена чрез равенствата

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_l, 0) &= f_0(x_1, \ldots, x_l), \\ f(x_1, \ldots, x_l, t+1) &= f_1(x_1, \ldots, x_l, t, f(x_1, \ldots, x_l, t)). \end{aligned} \tag{2}$$

5. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_{l+1}$ е частично рекурсивна, то функцията

$$\lambda x_1 \ldots x_l . \mu t [f_0(x_1, \ldots, x_l, t) = 0] \tag{3}$$

[1] Разбира се, това понятие съвпада с общото понятие за алгоритмична изчислимост в случая, когато функцията е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^k$.

също е частично рекурсивна.[2]

Частично рекурсивните функции от $\mathcal{F}_k$, които са дефинирани навсякъде в $\mathbb{N}^k$, се наричат *рекурсивни*.

Забележка 1. Функциите, за които става дума в точка 1 на горната дефиниция, се наричат *проекционни функции*, функцията (1) се нарича *суперпозиция* на функциите $f_0, f_1, \dots, f_k$, за функцията f от точка 4 се казва, че е получена от f_0 и f_1 чрез *примитивна рекурсия*, а за функцията (3) – че е получена от f_0 чрез *минимизация*.

Забележка 2. Обикновено в индуктивната дефиниция на понятието частично рекурсивна функция се включва и точка, според която константата 0 е частично рекурсивна функция. Такава точка обаче е излишна, защото тази константа може да се получи чрез минимизация от подходяща проекционна функция. Ако в горната дефиниция пропуснем последната точка и заменим в останалите точки думата „частично“ с думата „примитивно“, като обаче добавим точка, според която функцията от $\mathcal{F}_0$ със стойност 0 е примитивно рекурсивна, получаваме индуктивна дефиниция на един важен същински подклас на класа на рекурсивните функции – класа на *примитивно рекурсивните функции*. От нея лесно следва, че при всяко естествено число k навсякъде дефинираните константни функции от $\mathcal{F}_k$ са примитивно рекурсивни, а значи и рекурсивни.

Благодарение на точки 1 и 3 от дефиницията на понятието частично рекурсивна функция класът на тези функции е затворен относно явни дефиниции, т.е. такива, при които стойността на една функция в $\mathbb{N}$ за произволни стойности на аргументите ѝ се определя чрез израз, получен от означения на аргументи на функцията и означения на дадени функции чрез някакъв брой прилагания на функция към вече построени изрази. Например, ако g и h са частично рекурсивни функции съответно от $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_3$, дефинирана чрез равенството

$$f(x,y,z) = h(g(g(x,h(z)),h(x))).$$

Затворени относно явни дефиниции са също класът на рекурсивните функции и класът на примитивно рекурсивните функции.

Поради примитивната рекурсивност на константните функции, казаното в предходния абзац остава в сила и ако разширим обхвата на термина явна дефиниция, допускайки наред с означенията на аргументи на функцията още и означения на конкретни естествени числа.

Функциите събиране и умножение в $\mathbb{N}$ са примитивно рекурсивни благодарение на равенствата

$$x + 0 = x, \quad x + (t+1) = (x+t) + 1, \quad x.0 = 0, \quad x.(t+1) = x.t + x.$$

[2] С $\mu t[f_0(x_1,\dots,x_l,t) = 0]$ се означава такова естествено число s, удовлетворяващо условието $f_0(x_1,\dots,x_l,s) = 0$, че $f_0(x_1,\dots,x_l,t)$ да бъде дефинирано и различно от 0 за всяко естествено число t, по-малко от s.

Ако се условим под 0^0 да разбираме 1, функцията степенуване в $\mathbb{N}$ също ще бъде примитивно рекурсивна – благодарение на равенствата

$$x^0 = 1, \quad x^{t+1} = x^t.x.$$

Примитивно рекурсивна е и функцията $\lambda t.t!$ (където под $0!$ се разбира 1). Това е така благодарение на равенството $(t+1)! = t!(t+1)$.

Понеже разликата на две естествени числа не винаги е естествено число, функцията изваждане в $\mathbb{N}$ не е навсякъде дефинирана в $\mathbb{N}^2$ и поради това не е рекурсивна. Една тясно свързана с нея примитивно рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$ се дефинира обаче с помощта на понятието отсечена разлика. А именно, ако x и y са две естествени числа, то *отсечена разлика* на x и y се нарича естественото число $x \dot{-} y$, определено по следния начин:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Функцията $\lambda xy.x \dot{-} y$ е примитивно рекурсивна. Това се установява, като се използват равенствата

$$0 \dot{-} 1 = 0, \quad (t+1) \dot{-} 1 = t, \quad x \dot{-} 0 = x, \quad x \dot{-} (t+1) = (x \dot{-} t) \dot{-} 1$$

– първите две от тях показват, че функцията $\lambda z.z \dot{-} 1$ е примитивно рекурсивна, а оттук, като използваме другите две, виждаме примитивната рекурсивност и на $\lambda xy.x \dot{-} y$.

От примитивната рекурсивност на функцията отсечена разлика и равенството

$$\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

следва, че и функцията $\lambda xy.\min(x,y)$ е примитивно рекурсивна. Примитивно рекурсивни са също функциите $\lambda xy.\max(x,y)$ и $\lambda xy.|x-y|$ – това следва от равенствата

$$\max(x,y) = y + (x \dot{-} y), \quad |x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

като се използва примитивната рекурсивност на отсечената разлика и събирането.[3]

За всяко естествено число x числата $\operatorname{sg} x$ и $\overline{\operatorname{sg}}\, x$ се дефинират така:

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0, \\ 1 & \text{в противен случай,} \end{cases} \qquad \overline{\operatorname{sg}}\, x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Като използваме равенствата $\overline{\operatorname{sg}}\, x = 1 \dot{-} x$ и $\operatorname{sg} x = \overline{\operatorname{sg}}\,\overline{\operatorname{sg}}\, x$, виждаме последователно, че функциите $\lambda x.\overline{\operatorname{sg}}\, x$ и $\lambda x.\operatorname{sg} x$ също са примитивно рекурсивни.

Следното твърдение е полезно за доказване на примитивната рекурсивност на някои други функции.

[3] Като използваме примитивната рекурсивност на функцията $\lambda xy.|x-y|$ и на събирането, можем да покажем, че изваждането в множеството на естествените числа е частично рекурсивна функция. А именно, достатъчно е да забележим, че функцията изваждане в $\mathbb{N}$ може да се получи чрез минимизация от функцията $f_0(x,y,t) = |x - (y+t)|$.

Лема 1. Нека f е примитивно рекурсивна функция от $\mathcal{F}_{k+1}$, която е строго растяща относно последния си аргумент, т.е.

$$f(x_1,\dots,x_k,s) < f(x_1,\dots,x_k,s+1)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k,s$. Тогава функцията g от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенството

$$g(x_1,\dots,x_k,t) = \min\{s \in \mathbb{N} \mid f(x_1,\dots,x_k,s) \geq t\}, \tag{4}$$

също е примитивно рекурсивна.

Доказателство. С индукция относно s се показва, че $f(x_1,\dots,x_k,s) \geq s$ при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k,s$. Оттук е ясно, че равенството (4) определя функция g, която е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^{k+1}$. Очевидно $g(x_1,\dots,x_k,0) = 0$ при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k$. От друга страна лесно се проверява, че

$$g(x_1,\dots,x_k,t+1) = g(x_1,\dots,x_k,t) + \mathrm{sg}((t+1) \dot{-} f(x_1,\dots,x_k,g(x_1,\dots,x_k,t)))$$

при всеки избор на $x_1,\dots,x_k,t$ в $\mathbb{N}$. □

Следствие 1. Нека f удовлетворява предположенията на горната лема и нека освен това $f(x_1,\dots,x_k,0) = 0$ при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k$. Тогава функцията h от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенството

$$h(x_1,\dots,x_k,t) = \max\{s \in \mathbb{N} \mid f(x_1,\dots,x_k,s) \leq t\}, \tag{5}$$

е примитивно рекурсивна.

Доказателство. Равенството (5) определя функция h, която е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^{k+1}$, защото, както и да изберем естествените числа $x_1,\dots,x_k,t$, неравенството $f(x_1,\dots,x_k,s) \leq t$ е изпълнено поне при $s = 0$ и е нарушено за всяко s, по-голямо от t. Примитивната рекурсивност на тази функция следва от равенството

$$h(x_1,\dots,x_k,t) = g(x_1,\dots,x_k,t+1) \dot{-} 1,$$

където g е функцията, определена чрез равенството (4). □

За произволно реално число a най-голямото цяло число, ненадминаващо a, се означава с $\lfloor a \rfloor$. Очевидно е, че при всеки избор на естествените числа x и t е в сила равенството

$$\left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor = \max\{s \in \mathbb{N} \mid (x+1)s \leq t\}.$$

Оттук, като приложим следствие 1 при $k = 1$ и функция f, определена чрез равенството $f(x,s) = (x+1)s$, заключаваме, че функцията

$$\lambda xt. \left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor$$

е примитивно рекурсивна.

Ако m е естествено число, различно от 0, то за произволно естествено число y остатъкът от делението на t с m се означава с $t \bmod m$. Функцията $\lambda xt.t \bmod (x+1)$ е примитивно рекурсивна, защото при всеки избор на естествените числа x и t е в сила равенството

$$t \mod (x+1) = t \dot{-} \left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor (x+1).$$

Следната теорема твърди, грубо казано, че съществува взаимно еднозначно съответствие между $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$, което се осъществява чрез примитивно рекурсивни функции.

Теорема 1. Съществуват такава примитивно рекурсивна функция J от $\mathcal{F}_2$ и такива примитивно рекурсивни функции L и R от $\mathcal{F}_1$, че при всеки избор на естествените числа x и y са в сила равенствата $L(J(x,y)) = x$, $R(J(x,y)) = y$ и, а при всеки избор на естественото число t имаме равенството $J(L(t),R(t)) = t$. При това $J(x,y) \geq \max(x,y)$ при всеки избор на естествените числа x и y.

Доказателство. Дефинираме релация $\prec$ в $\mathbb{N}^2$ чрез следното уславяне:

$$(x_1,y_1) \prec (x_2,y_2) \Longleftrightarrow x_1+y_1 < x_2+y_2 \text{ или } (x_1+y_1 = x_2+y_2 \text{ и } x_1 < x_2).$$

Лесно се проверява, че така дефинираната релация е строга линейна наредба в $\mathbb{N}^2$, като за всеки елемент (x,y) на $\mathbb{N}^2$ множеството

$$\left\{ (x_1,y_1) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, (x_1,y_1) \prec (x,y) \right\} \tag{6}$$

е крайно и броят на елементите му е

$$1+2+3+\cdots+(x+y)+x = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Нека функцията J е онази, която на всеки елемент (x,y) на $\mathbb{N}^2$ съпоставя броя на елементите на множеството (6). Ясно е, че тази функция е примитивно рекурсивна и е в сила формулираното в теоремата неравенство, а лесно се съобразява, че J е обратима и множеството на стойностите ѝ е цялото множество $\mathbb{N}$. При това положение съществуват такива навсякъде дефинирани функции L и R от $\mathcal{F}_1$, че изображението $t \mapsto (L(t),R(t))$ на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^2$ да бъде обратното изображение на J. За тези функции ще бъдат изпълнени равенствата, фигуриращи във формулировката на теоремата, и остава само да се докаже, че L и R са примитивно рекурсивни. За целта отбелязваме, че винаги, когато за дадени естествени числа x, y и t е изпълнено равенството $J(x,y) = t$, ще имаме и равенствата

$$x+y = h(t), \quad x = t \dot{-} f(h(t)), \quad y = h(t) \dot{-} (t \dot{-} f(h(t))),$$

където f и h са функциите от $\mathcal{F}_2$, определени чрез равенствата

$$f(s) = \frac{s(s+1)}{2}, \quad h(t) = \max\{s \in \mathbb{N} \,|\, f(s) \leq t\}.$$

Функцията f, разбира се, е примитивно рекурсивна, а като използваме (при $k = 0$) следствие 1, виждаме, че и функцията h е примитивно рекурсивна. Оттук примитивната рекурсивност на функциите L и R става ясна, тъй като изложеното по-горе показва, че

$$L(t) = t \dot{-} f(h(t)), \quad R(t) = h(t) \dot{-} (t \dot{-} f(h(t)))$$

при всеки избор на естественото число t. □

Нека J е функцията от горната теорема. За всяко положително цяло число k да дефинираме функция J_k от $\mathcal{F}_k$, като положим

$$J_1(x) = x, \quad J_{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = J(J_k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}).$$

Очевидно функциите $J_1, J_2, J_3, \dots$ са примитивно рекурсивни, като J_2 е всъщност функцията J. Индуктивно се показва, че за всяко положително цяло число k съществуват примитивно рекурсивни функции $A_{k,1}, \dots, A_{k,k}$ от $\mathcal{F}_1$, такива че

$$A_{k,i}(J_k(x_1, \dots, x_k)) = x_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_k$ и

$$J_k(A_{k,1}(t), \dots, A_{k,k}(t)) = t$$

за всяко естествено число t (полагаме $A_{1,1} = J_1$, $A_{k+1,i}(t) = A_{k,i}(L(t))$ при $i = 1, \dots, k$, $A_{k+1,k+1} = R$). Грубо казано, при $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ съществува взаимно еднозначно съответствие между $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}$. което се осъществява чрез примитивно рекурсивни функции.

Лема 2. Съществува такава примитивно рекурсивна функция $\gamma \in \mathcal{F}_2$, че всяка непразна крайна редица от естествени числа може да се представи във вида $\gamma(z, 0), \gamma(z, 1), \dots, \gamma(z, t)$ при някой избор на естествени числа z и t.

Доказателство. Да положим например $\gamma(z, i) = R(L^i(z))$, където $L^i(z)$ означава $L(\dots(L(L(z))\dots)$ с i-кратно прилагане на L (така дефинираната функция има желаното свойство, защото при произволен избор на естествени числа t и $s_0, s_1, \dots, s_t$, ако $z = J_{t+2}(0, s_t, \dots, s_1, s_0)$, то $\gamma(z, i) = s_i$ за $i = 0, 1, \dots, t$). □

Ако $f \in \mathcal{F}_k$, където $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, да разгледаме функцията $\hat{f}$ от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$\hat{f}(t) = f(A_{k,1}(t), \dots, A_{k,k}(t)).$$

Ясно е, че функцията f е примитивно рекурсивна точно тогава, когато е примитивно рекурсивна функцията $\hat{f}$, и аналогични твърдения са в сила за свойствата рекурсивност и частична рекурсивност. Това дава принципна възможност понятията примитивна рекурсивност и частична рекурсивност да се дефинират за функции от $\mathcal{F}_1$ с помощта на индуктивни дефиниции в рамките само на $\mathcal{F}_1$. Ето една такава дефиниция за понятието частична рекурсивност (възможни са и значително по-прости негови дефиниции в този дух):

A. Функциите $\lambda x.x+1$, L и R са частично рекурсивни.

B. Ако f_0 и f_1 са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивни са също функциите $\lambda x.f_0(f_1(x))$ и $\lambda x.J(f_0(x), f_1(x))$.

C. Ако f_0 и f_1 са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$f(x) = \begin{cases} f_0(L(x)), & \text{ако } R(x) = 0, \\ f_1(J_3(L(x), R(x)-1, f(J(L(x), R(x)-1)))) & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

D. Ако f_0 е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$f(x) = \mu t[f_0(J(x,t)) = 0].$$

Ако в горната дефиниция пропуснем точка D, в останалите точки заменим „частично“ с „примитивно“ и в точка A добавим константата $\lambda x.0$, ще получим индуктивна дефиниция в рамките на $\mathcal{F}_1$ на понятието примитивна рекурсивност. Така получената дефиниция може да се използва, за да се подредят ефективно в една редица $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ всички примитивно рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$. Ще я дефинираме индуктивно по следния начин: $\varphi_0 = \lambda x.0$, $\varphi_1 = \lambda x.x+1$, $\varphi_2 = L$, $\varphi_3 = R$, $\varphi_{3J(m,n)+4} = \lambda x.\varphi_m(\varphi_n(x))$, $\varphi_{3J(m,n)+5} = \lambda x.J(\varphi_m(x), \varphi_n(x))$, а $\varphi_{3J(m,n)+6}$ е функцията f, която се определя по начина от точка C при $f_0 = \varphi_m$ и $f_1 = \varphi_n$. Да разгледаме навсякъде дефинираната функция Φ от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството

$$\Phi(z,x) = \varphi_z(x).$$

Тя е алгоритмично изчислима и може да се докаже, че е рекурсивна. Функцията Φ обаче не е примитивно рекурсивна. И наистина, да допуснем, че Φ е примитивно рекурсивна. Тогава ще бъде примитивно рекурсивна и функцията $\lambda x.\Phi(x,x)+1$ от $\mathcal{F}_1$, следователно тя ще бъде някой член φ_e на редицата $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Значи за всяко x от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството $\varphi_e(x) = \Phi(x,x)+1$, а то може да се напише и във вида $\Phi(e,x) = \Phi(x,x)+1$. От последното равенство обаче при $x = e$ получаваме невъзможното равенство $\Phi(e,e) = \Phi(e,e)+1$.

Всички частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$ също могат да се подредят ефективно в редица $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ – като се използва по аналогичен начин индуктивната дефиниция в рамките на $\mathcal{F}_1$ за частична рекурсивност на функции от $\mathcal{F}_1$. След като се направи това, може да се разгледа функцията Ψ от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството

$$\Psi(z,x) = \psi_z(x).$$

Тя ще бъде алгоритмично изчислима в тесния смисъл на думата и ще може да се докаже, че е частично рекурсивна. Разсъждения за функцията

$\lambda x.\Psi(x,x)+1$, подобни на горните разсъждения за функцията $\lambda x.\Phi(x,x)+1$, биха ни довели обаче само до заключение, че функцията $\lambda x.\Phi(x,x)$ не е дефинирана в точката e, до която се достига при тях.[4] С помощта на малко по-сложно разсъждение може да се покаже, че функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$ не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$. И наистина, нека θ е произволна частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$. Тогава $\lambda x.\theta(x)+1$ също е частично рекурсивна функция и следователно е някой член ψ_e на редицата $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\ldots$. Значи за всяко x от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството $\psi_e(x)=\theta(x)+1$, а то може да се напише и във вида $\Psi(e,x)=\theta(x)+1$. При $x=e$ то добива вида $\Psi(e,e)=\theta(e)+1$. От него следва, че ако числото e принадлежи на дефиниционната област на θ, то ще принадлежи и на дефиниционната област на функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$, поради което нейната стойност в точката e ще бъде стойност и на θ в тази точка и значи ще имаме равенството $\theta(e)=\theta(e)+1$. Оттук е ясно, че числото e не може да принадлежи на дефиниционната област на θ. С това показахме, че за всяка частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$, съществува естествено число, непринадлежащо на дефиниционната ѝ област. Разбира се, щом $\lambda x.\Psi(x,x)$ не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, функцията Ψ не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$.

Едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ се нарича *рекурсивно*, ако съществува рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, на която стойността е различна от 0 точно в онези точки от $\mathbb{N}^k$, които принадлежат на въпросното подмножество.[5] От интуитивна гледна точка рекурсивността на едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ означава съществуване на алгоритъм за разпознаване кои точки от $\mathbb{N}^k$ принадлежат на даденото подмножество. Като пример за нерекурсивно подмножество на $\mathbb{N}$ можем да посочим дефиниционната област на функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$. Тази дефиниционна област не е рекурсивно подмножество на $\mathbb{N}$, защото функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$ е частично рекурсивна, а е в сила следното твърдение:

Лема 3. Ако една частично рекурсивна функция ψ от $\mathcal{F}_k$ има рекурсивна дефиниционна област, то съществува рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, която е продължение на ψ.

Доказателство. Нека ψ е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, а h е такава рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, че

$$\operatorname{dom}(\psi)=\left\{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, h(x_1,\ldots x_k)\neq 0\right\}.$$

[4]Това заключение все пак заслужава внимание, защото дефиниционната област на споменатата функция е безкрайно множество – то съдържа например всички естествени числа z, за които функцията ψ_z е примитивно рекурсивна.

[5]Еквивалентна дефиниция получаваме, ако вместо „различна от 0“ напишем „равна на 0“ и/или поискаме всяка стойност на функцията да бъде 0 или 1.

.. Разглеждаме функцията f от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенствата

$$f(x_1,\dots,x_k,0)=0,$$
$$f(x_1,\dots,x_k,t+1)=\psi(x_1,\dots,x_k).$$

Тя е частично рекурсивна, защото се получава чрез примитивна рекурсия от частично рекурсивните функции $\lambda x_1\dots x_k.0$ и $\lambda x_1\dots x_k t y.\psi(x_1,\dots,x_k)$. Да определим функция θ от $\mathcal{F}_k$, като положим

$$\theta(x_1,\dots,x_k)=f(x_1,\dots,x_k,h(x_1,\dots,x_k)).$$

Очевидно функцията θ е продължение на ψ и е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^k$. Но тя е и рекурсивна, защото е суперпозиция на функцията f, проекционните функции от $\mathcal{F}_k$ и функцията h. □

От дефиницията на понятието рекурсивно множество лесно следва, че за всяко $k\in\mathbb{N}$ рекурсивните подмножества на $\mathbb{N}^k$ образуват булева алгебра, т.е. празното множество и цялото $\mathbb{N}^k$ са рекурсивни и съвкупността на рекурсивните подмножества на $\mathbb{N}^k$ е затворена относно действията обединение, сечение и допълнение.

Макар примитивно рекурсивните функции да образуват същински подклас на класа на рекурсивните функции (и толкова повече – на класа на частично рекурсивните), този подклас е в известен смисъл доста широк. А именно, чрез индукция, съобразена с дадената в началото индуктивна дефиниция на понятието частично рекурсивна функция, може да се докаже следното твърдение:

Теорема 2. За всяко $k\in\mathbb{N}$ и всяка частично рекурсивна функция f от $\mathcal{F}_k$ съществува такава примитивно рекурсивна функция g от $\mathcal{F}_{k+2}$, че при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k,y$ да бъде в сила еквивалентността

$$f(x_1,\dots,x_k)=y \Longleftrightarrow \exists z(g(x_1,\dots,x_k,y,z)=0).$$

Доказателство. Ако f е функция от вида в точка 1 или точка 2 на дефиницията, полагаме $g=\lambda x_1\dots x_k yz.|y-f(x_1,\dots,x_k)|$.

Нека f има вида (1), където $f_0\in\mathcal{F}_k$, $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}_l$, и нека $g_0\in\mathcal{F}_{k+2}$, $g_1,\dots,g_k\in\mathcal{F}_{l+2}$ са такива примитивно рекурсивни функции, че

$$f_0(t_1,\dots,t_k)=y \Longleftrightarrow \exists z(g_0(t_1,\dots,t_k,y,z)=0)$$

при всеки избор на естествените числа $t_1,\dots,t_k,y$ и

$$f_i(x_1,\dots,x_l)=t \Longleftrightarrow \exists z(g_i(x_1,\dots,x_l,t,z)=0),\quad i=1,\dots,k,$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,t$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,y$ равенството $f(x_1,\dots,x_l)=y$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_1,\dots,t_k$, за които са в сила равенствата $f_1(x_1,\dots,x_l)=t_1,\ \dots,\ f_k(x_1,\dots,x_l)=t_k,\ f_0(t_1,\dots,t_k)=y$, а значи и на съществуването на естествени числа $t_1, \dots, t_k, z_1, \dots, z_k, z_0$, удовлетворяващи равенството

$$g_1(x_1, \dots, x_l, t_1, z_1) + \dots + g_k(x_1, \dots, x_l, t_k, z_k) + g_0(t_1, \dots, t_k, y, z_0) = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_l, y$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1, \dots, x_l) = y \iff \exists z(g(x_1, \dots, x_l, y, z) = 0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_l, y, z) = g_1(x_1, \dots, x_l, A_{2k+1,1}(z), A_{2k+1,2}(z)) + \\ \dots \\ + g_k(x_1, \dots, x_l, A_{2k+1,2k-1}(z), A_{2k+1,2k}(z)) \\ + g_0(A_{2k+1,1}(z), \dots, A_{2k+1,2k-1}(z), y, A_{2k+1,2k+1}(z)) \end{aligned}$$

и следователно е примитивно рекурсивна.

В разсъжденията във връзка с точки 4 и 5 на дефиницията ще използваме функция γ със свойствата от лема 2.

Във връзка с точка 4 да предположим, че функцията $f \in \mathcal{F}_{l+1}$ е определена чрез равенствата (2), където $f_0 \in \mathcal{F}_l$, $f_1 \in \mathcal{F}_{l+2}$, а $g_0 \in \mathcal{F}_{l+2}$, $g_1 \in \mathcal{F}_{l+4}$ са такива примитивно рекурсивни функции, че

$$f_0(x_1, \dots, x_l) = y \iff \exists z(g_0(x_1, \dots, x_l, y, z) = 0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_l, y$ и

$$f_1(x_1, \dots, x_l, t, y) = y' \iff \exists z(g_1(x_1, \dots, x_l, t, y, y', z) = 0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_l, t, y, y'$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_l, t, y$ равенството $f(x_1, \dots, x_l, t) = y$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $y_0, y_1, \dots, y_t$, за които са в сила равенствата $f_0(x_1, \dots, x_l) = y_0, \quad y_t = y$ и равенствата

$$f_1(x_1, \dots, x_l, i, y_i) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, t-1.$$

Това от своя страна е еквивалентно на съществуването на естествени числа $y_0, z_0, y_1, z_1, \dots, y_t, z_t$, удовлетворяващи равенството

$$g_0(x_1, \dots, x_l, y_0, z_0) + |y_t - y| + \sum_{i<t} g_1(x_1, \dots, x_l, i, y_i, y_{i+1}, z_{i+1}) = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1, \dots, x_l, t, y$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1, \dots, x_l, t) = y \iff \exists z(g(x_1, \dots, x_l, t, y, z) = 0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$g(x_1,\dots,x_l,t,y,z) = g_0(x_1,\dots,x_l,\gamma(z,0),\gamma(z,1)) + |\gamma(z,2t+2) - y| + \sum_{i<t} g_1(x_1,\dots,x_l,i,\gamma(z,2i),\gamma(z,2i+2),\gamma(z,2i+3))$$

и следователно (както лесно се вижда) е примитивно рекурсивна.

Във връзка с точка 5 да предположим, че функцията $f \in \mathcal{F}_l$ е функцията (3), където $f_0 \in \mathcal{F}_{l+1}$, а $g_0 \in \mathcal{F}_{l+3}$ е такава примитивно рекурсивна функция, че

$$f_0(x_1,\dots,x_l,t) = y \Longleftrightarrow \exists z(g_0(x_1,\dots,x_l,t,y,z) = 0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,t,y$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,s$ равенството $f(x_1,\dots,x_l) = s$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_0,t_1,\dots,t_{s-1},t_s$, за които са изпълнени равенствата

$$f_0(x_1,\dots,x_l,i) = t_i, \quad i = 0,1,\dots,s-1,s,$$

равенствата

$$\overline{\mathrm{sg}}(t_i) = 0, \quad i = 0,1,\dots,s-1,$$

и равенството $t_s = 0$. Това от своя страна е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_0,z_0,t_1,z_1,\dots,t_{s-1},z_{s-1},t_s,z_s$, удовлетворяващи равенството

$$\sum_{i=0}^{s} g_0(x_1,\dots,x_l,i,t_i,z_i) + \sum_{i<s} \overline{\mathrm{sg}}(t_i) + t_s = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,s$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1,\dots,x_l) = s \Longleftrightarrow \exists z(g(x_1,\dots,x_l,s,z) = 0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$g(x_1,\dots,x_l,s,z) = \sum_{i=0}^{s} g_0(x_1,\dots,x_l,i,\gamma(z,2i),\gamma(z,2i+1)) + \sum_{i<s} \overline{\mathrm{sg}}(\gamma(z,2i)) + \gamma(z,2s)$$

и следователно е примитивно рекурсивна. □

Следствие 2. Ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, то съществува такава примитивно рекурсивна функция h от $\mathcal{F}_{k+1}$, че

$$f(x_1,\dots,x_k) = L(\mu t[h(x_1,\dots,x_k,t) = 0])$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k$ и следователно

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{ (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t) = 0) \right\}.$$

Доказателство. Полагаме $h(x_1,\dots,x_k,t) = g(x_1,\dots,x_k,L(t),R(t))$, където g е със свойствата от теорема 2. $\square$

Едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ се нарича *рекурсивно номеруемо*, ако то е дефиниционна област на някоя частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$. От следствие 2 е ясно, че всяко рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}^k$ може да се представи във вида $\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}$ при някой избор на примитивно рекурсивна функция $h\in\mathcal{F}_{k+1}$. Обратното също е вярно, защото за всяка примитивно рекурсивна функция $h\in\mathcal{F}_k$ множеството $\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}$ е дефиниционна област например на функцията $\lambda x_1,\dots,x_k.\mu t[h(x_1,\dots,x_k,t)=0]$.

Множеството на стойностите на всяка частично рекурсивна функция е рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}$. И наистина, ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, а g е със свойствата от теорема 2, то

$$\mathrm{rng}(f) = \{y\in\mathbb{N} \mid \exists t(h(y,t)=0\},$$

където $h = \lambda yt.g(A_{k+1,1}(t),\dots,A_{k+1,k}(t),y,A_{k+1,k+1}(t))$. Обратното също е вярно, защото за всяка частично рекурсивна функция f от $\mathcal{F}_1$ множеството $\mathrm{dom}(f)$ съвпада с множеството на стойностите на функцията $\lambda x.f_0(x,f(x))$, където $f_0 = \lambda xy.x$.

От дадената по-горе дефиниция съвсем лесно следва, че сечението на две рекурсивно номеруеми подмножества на $\mathbb{N}^k$ е пак рекурсивно номеруемо. Обединението им също е рекурсивно номеруемо, защото за всеки две примитивно рекурсивни функции h_1 и h_2 от $\mathcal{F}_{k+1}$ е в сила равенството

$$\bigcup_{i=1}^{2}\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h_i(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\} = \\ \left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h_1(x_1,\dots,x_k,t).h_2(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}.$$

Всички рекурсивни множества са рекурсивно номеруеми, защото за всяка примитивно рекурсивна функция $g\in\mathcal{F}_k$ имаме равенството

$$\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, g(x_1,\dots,x_k)\neq 0\right\} = \\ \left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(\overline{\mathrm{sg}}\,g(x_1,\dots,x_k)=0)\right\}.$$

Обратното твърдение не е вярно – посочихме частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$ с нерекурсивна дефиниционна област.

Оказва се, че едно рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}^k$ е рекурсивно точно тогава, когато и неговото допълнение до $\mathbb{N}^k$ е рекурсивно номеруемо. В едната посока това следва от обстоятелството, че рекурсивността на подмножествата на $\mathbb{N}^k$ се запазва при образуване на тяхно допълнение до $\mathbb{N}^k$ и че рекурсивнитв множества са рекурсивно номеруеми. За разсъждението в обратната посока да предположим, че $M\subseteq\mathbb{N}^k$ и всяко от множествата M и $\mathbb{N}^k\smallsetminus M$ е рекурсивно номеруемо. В такъв случай

$$M = \left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}, \\ \mathbb{N}^k\smallsetminus M = \left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(\bar{h}(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}$$

при някой избор на примитивно рекурсивни функции h и $\bar{h}$ от $\mathcal{F}_{k+1}$. Нека функцията g от $\mathcal{F}_k$ се определя чрез равенството

$$g(x_1,\ldots,x_k) = \bar{h}(x_1,\ldots,x_k,\mu t[h(x_1,\ldots,x_k,t).\bar{h}(x_1,\ldots,x_k,t) = 0]).$$

Тя е рекурсивна, а $M = \left\{ (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, g(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \right\}$, следователно множеството M е рекурсивно.

Разбира се, като вземем предвид току-що доказаното и съществуването на нерекурсивно рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}$, виждаме, че съществува рекурсивно номеруемо множество от естествени числа, чието допълнение до $\mathbb{N}$ не е рекурсивно номеруемо.