Равносилност на изчислимостта на неотрицателно реално число относно позиционна бройна система и изчислимостта му относно представянето на Гжегорчик

Нека b е цяло число, по-голямо от 1. Знаем, че представянето ρ_b на множеството на неотрицателните реални числа (т.е. представянето им в бройна система с основа b) не е еквивалентно на представянето на Гжегорчик. Въпреки това множеството на ρ_b-изчислимите реални числа съвпада с множеството на онези, които са изчислими относно представянето на Гжегорчик.

Теорема. Нека ξ е произволно неотрицателно реално число. Числото ξ е ρ_b-изчислимо точно тогава, когато то е изчислимо относно представянето на Гжегорчик.

Доказателство. Съгласно приетите от нас дефиниции в сила са следните две твърдения:

1. Числото ξ е ρ_b-изчислимо точно тогава, когато

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s(i)}{b^i} \tag{1}$$

за някоя рекурсивна функция s от $\mathbb{T}$, удовлетворяваща условието

$$s(i) < b, \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

2. Числото ξ е изчислимо относно представянето на Гжегорчик точно тогава, когато за някоя рекурсивна функция t от $\mathbb{T}$ са в сила неравенствата

$$\left| \frac{t(j)}{j+1} - \xi \right| < \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Да предположим най-напред, че числото ξ е ρ_b-изчислимо и значи за някоя рекурсивна функция s от $\mathbb{T}$, удовлетворяваща условието (2), имаме равенството (1). Тогава за всяко естествено число m

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \frac{s(i)}{b^i} - \xi \right| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^i} = \frac{1}{b^m}$$

и следователно при всеки избор на естествените числа j и m

$$\left|\left\lfloor\frac{1}{2}+(j+1)\sum_{i=0}^{m}\frac{s(i)}{b^i}\right\rfloor-(j+1)\xi\right|$$
$$\leq\left|\left\lfloor\frac{1}{2}+(j+1)\sum_{i=0}^{m}\frac{s(i)}{b^i}\right\rfloor-(j+1)\sum_{i=0}^{m}\frac{s(i)}{b^i}\right|+(j+1)\left|\sum_{i=0}^{m}\frac{s(i)}{b^i}-\xi\right|\leq\frac{1}{2}+\frac{j+1}{b^m}.$$

Оттук виждаме, че неравенствата (3) се удовлетворяват от функцията

$$t(j)=\left\lfloor\frac{1}{2}+(j+1)\sum_{i=0}^{h(j)}\frac{s(i)}{b^i}\right\rfloor, \tag{4}$$

където h е функцията от $\mathbb{T}$, дефинирана чрез равенството

$$h(j)=\min\left\{m\in\mathbb{N}\;\middle|\;\frac{j+1}{b^m}<\frac{1}{2}\right\}. \tag{5}$$

Споменатата функция t е рекурсивна и следователно ξ е изчислимо относно представянето на Гжегорчик.

Да предположим сега, че числото ξ е изчислимо относно представянето на Гжегорчик и значи неравенствата (3) се удовлетворяват от някоя рекурсивна функция t от $\mathbb{T}$. Ако ξ е число от вида pb^{-m}, където p и m са естествени числа, то очевидно ξ е ρ_b-изчислимо. Затова да се занимаем със случая, когато ξ не може да се представи в този вид. Да разгледаме функция s от $\mathbb{T}$, удовлетворяваща условието (2), за която е в сила равенството (1) (известно е, че такава функция съществува). Ще покажем, че тя е рекурсивна. Благодарение на предположението, че числото ξ не може да се представи в споменатия по-горе вид, няма такова естествено число m, че да е в сила равенството $s(i)=b-1$ за всяко естествено число i, по-голямо от m. Оттук следва, че при всеки избор на естественото число m

$$b^m\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{s(i)}{b^i}<1$$

и значи

$$\lfloor b^m\xi\rfloor=b^m\sum_{i=0}^{m}\frac{s(i)}{b^i}.$$

Това позволява да заключим, че при $m=1,2,3,\ldots$ имаме равенството

$$s(m)=\lfloor b^m\xi\rfloor-b\lfloor b^{m-1}\xi\rfloor.$$

Благодарение на него рекурсивността на функцията s ще бъде ясна, ако докажем, че е рекурсивна функцията $\lambda k.\lfloor b^k\xi\rfloor$ от $\mathbb{T}$. Последното ще постигнем, като покажем, че при всеки избор на естественото число k съществуват естествени числа j, за които е в сила неравенството

$$\left\lfloor b^k\frac{t(j)+1}{j+1}\right\rfloor\leq b^k\frac{t(j)-1}{j+1}, \tag{6}$$

и за всяко такова j е вярно равенството

$$\lfloor b^k \xi \rfloor = \left\lfloor b^k \frac{t(j)+1}{j+1} \right\rfloor \tag{7}$$

(в частност ще имаме равенството

$$\lfloor b^k \xi \rfloor = \left\lfloor b^k \frac{t(h(k))+1}{h(k)+1} \right\rfloor,$$

където $h(k)$ е най-малкото от естествените числа j, удовлетворяващи неравенството (6), а при такава дефиниция на h дясната страна на въпросното равенство ще бъде рекурсивна функция на k). Ще си послужим със следните разсъждения. Нека k е дадено естествено число. За всяко естествено число j имаме неравенствата

$$\frac{t(j)-1}{j+1} < \xi < \frac{t(j)+1}{j+1},$$

а значи и неравенствата

$$b^k \frac{t(j)-1}{j+1} < b^k \xi < b^k \frac{t(j)+1}{j+1}. \tag{8}$$

Числото $b^k \xi$ не е цяло и следователно се намира в отворения интервал между някои две последователни цели числа. Тъй като $b^k \xi$ е граница при $j \to \infty$ на всяко от другите две произведения, фигуриращи в горните неравенства, тези две произведения също ще се намират в този интервал, когато числото j е достатъчно голямо, и тогава със сигурност ще е изпълнено неравенството (6) – ще е налице даже строго неравенство. Да предположим сега, че j е кое да е от естествените числа, за които е в сила (6). Като използваме и неравенствата (8), получаваме, че

$$\left\lfloor b^k \frac{t(j)+1}{j+1} \right\rfloor < b^k \xi < \left\lfloor b^k \frac{t(j)+1}{j+1} \right\rfloor + 1,$$

а оттук веднага следва равенството (7). □

Забележка. Нека ν е представянето на Гжегорчик на множеството на неотрицателните реални числа. Ако на всяка функция s от $\mathcal{F}_1$ поставим в съответствие функцията (4), където h се дефинира чрез равенството (5), ще получим един μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$. Ако проведем разсъжденията от първата част на доказателството без да използваме предположението, че функцията s е рекурсивна, ще установим, че този оператор е (ρ_b, ν)-реализация на тъждественото изображение на въпросното множество в себе си и значи това изображение е (ρ_b, ν)-изчислимо – едно твърдение, по-силно от твърдението, че ρ_b-изчислимите неотрицателни реални числа са ν-изчислими.