ТЕРМОВЕ

Както вече сме се условили, предполагаме, че е дадена една лексика $\Sigma=(A,\Omega,\Pi,\rho,\Xi)$ (по-нататък ще използваме това уславяне без повече да го припомняме; ще използваме без да ги припомняме и допълнителните уславяния, свързани с него). Някои думи над азбуката A, разширена със знаците лява кръгла скоба, дясна кръгла скоба и запетая, ще наречем *термове*. Дефиницията е индуктивна:

T1. Всяка дума от $\Omega_0\cup\Xi$ е терм.

T2. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са термове, то думата $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$ също е терм.

Тази дефиниция може да се представи чрез индуктивен механизъм в множеството U на думите над споменатото разширение на A, състоящ се от всички индуктори от вида $\varnothing/\tau$, където $\tau\in\Omega_0\cup\Xi$, и от всички индуктори от вида $\{\tau_1,...,\tau_n\}/\omega(\tau_1,...,\tau_n)$, където n е положително цяло число, $\omega\in\Omega_n$ и τ_1, ..., τ_n са елементи на U.

Аналогично дефинираме понятието *затворен терм*:

ЗТ1. Всяка дума от Ω_0 е затворен терм.

ЗТ2. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са затворени термове, то думата $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$ също е затворен терм.

Ясно е, че затворените термове са термове, а обратното не е вярно (например променливите са термове, които не са затворени).

Очевидно термовете, които се получават по T2, са различни от онези, които се получават по T1, и затворените термове, които се получават по ЗТ2, са различни от онези, които се получават по ЗТ1 (думите, получени по T2 или ЗТ2, съдържат скоби, докато думите, посочени в T1 или ЗТ1, не съдържат). Освен това, ако един терм е получен по T1, то неговото получаване е еднозначно в смисъл, че той не може да бъде едновременно в Ω_0 и в Ξ (понеже $\Xi\cap\Omega=\varnothing$). Важно е да се отбележи, че имаме еднозначност на получаването на термовете и на затворените термове и по T2 и ЗТ2 в следния смисъл: ако $\omega\in\Omega_n$, $\omega'\in\Omega_{n'}$, където n и n' са положителни цели числа, и τ_1, ..., τ_n, τ_1', ..., $\tau_{n'}'$ са термове, то равенството между думи

(1) $\omega(\tau_1,...,\tau_n)=\omega'(\tau_1',...,\tau_{n'}')$

е налице само тогава, когато имаме и равенствата $\omega=\omega'$, $n=n'$, $\tau_1=\tau_1'$, ..., $\tau_n=\tau_n'$. Това се установява с помощта на следните две леми, на които доказателството е с индукция, съобразена с дефиницията за терм:

Лема 1. Във всеки терм броят на участията на лява кръгла скоба е равен на броя на участията на дясна кръгла скоба.

Лема 2. Във всяко начало на терм, завършващо със запетая, броят на участията на лява кръгла скоба е по-голям от броя на участията на дясна кръгла скоба.

Прилагането на лемите става по следния начин. От равенството (1) веднага се вижда, че $\omega=\omega'$ и следователно $n=n'$, а това позволява да твърдим, че думите $\tau_1,...,\tau_n$ и $\tau_1',...,\tau_n'$ са равни. Оттук заключаваме най-напред, че $\tau_1=\tau_1'$. Ако $n=1$, то това е ясно, а при $n>1$ допускането, че думите τ_1 и τ_1' имат различни дължини, противоречи на лемите, тъй че и в този случай тези две думи ще се окажат равни (като еднакво дълги начала на една и съща дума). При $n>1$ установеното равенство $\tau_1=\tau_1'$ показва, че и думите $\tau_2,...,\tau_n$ и $\tau_2',...,\tau_n'$ също са равни, с което си послужваме по подобен начин, за да установим, че $\tau_2=\tau_2'$, и т.н.

Еднозначността на получаването на термовете и на затворените термове по точките от съответните индуктивни дефиниции ще наричаме още еднозначност на синтактичния им анализ. Тя позволява коректно да се дефинират понятията *стойност на затворен терм в дадена структура* и *стойност на терм в дадена конфигурация*. Въпросните стойности ще бъдат елементи на носителя на дадената структура или конфигурация. Ще дадем първо малко по-простата дефиниция за стойност на затворен терм в дадена структура $S=(C,I)$. Тази дефиниция е с индукция, съответна в известен смисъл на индуктивната дефиниция на понятието затворен терм, и има следния вид:

СЗТ1. Ако $\omega\in\Omega_0$, то ω има стойност $I(\omega)$ в S.

СЗТ2. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са затворени термове, имащи в S стойности съответно c_1, ..., c_n, то термът $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$ има стойност $I(\omega)(c_1,...,c_n)$ в S.

Можем да считаме, че горната дефиниция действа в множеството на всички наредени двойки, на които първият и вторият член са съответно затворен терм и елемент на C, и че тя определя за кои двойки от това множество приемаме, че вторият им член е стойност на първия в дадената структура. При такава гледна точка дефиницията може да се представи с индуктивен механизъм, състоящ се от всички индуктори от вида $\varnothing/(\omega,I(\omega))$, където $\omega\in\Omega_0$, и от всички индуктори от вида

$$\{(\tau_1,c_1),...,(\tau_n,c_n)\}/(\omega(\tau_1,...,\tau_n),I(\omega)(c_1,...,c_n)),$$

където n е положително цяло число, $\omega\in\Omega_n$, а τ_1, ..., τ_n и c_1, ..., c_n са съответно затворени термове и елементи на C.

Като се използва индукция, съобразена с индуктивната дефиниция на понятието затворен терм, доказва се, че всеки затворен терм има точно една стойност в S (при доказателството за единственост на стойността се използва още и еднозначността на синтактичния анализ на затворените термове). Ако τ е произволен затворен терм, то неговата стойност в S ще означаваме с τ^S. От точки СЗТ1 и СЗТ2 получаваме веднага следните две твърдения:

СЗТ1$^=$. Ако $\omega\in\Omega_0$, то $\omega^S=I(\omega)$.

СЗТ2$^=$. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са затворени термове, то $\omega(\tau_1,...,\tau_n)^S=I(\omega)(\tau_1{}^S,...,\tau_n{}^S)$.

Сега ще дадем дефиницията за стойност на произволен терм в дадена конфигурация (S,v), където от своя страна $S=(C,I)$. Дефиницията се състои от следните приемания:

СТ1. Ако $\omega\in\Omega_0$, то ω има стойност $I(\omega)$ в (S,v).

СТ1а. Ако $\xi\in\Xi$, то ξ има стойност $v(\xi)$ в (S,v).

СТ2. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са термове, имащи в (S,v) стойности съответно c_1, ..., c_n, то термът $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$ има стойност $I(\omega)(c_1,...,c_n)$ в (S,v).

Аналогично на случая на дефиницията за стойност на затворен терм в структура, и тук се доказва съществуване и единственост на стойността - т.е. доказва се, че всеки терм има точно една стойност в (S,v). Уславяме се стойността на произволен терм τ в (S,v) да означаваме с $\tau^{S,v}$. При така въведеното означение точки СТ1, СТ1а и СТ2 дават следните твърдения:

СТ1$^=$. Ако $\omega\in\Omega$, то $\omega^{S,v}=I(\omega)$.

СТ1а$^=$. Ако $\xi\in\Xi$, то $\xi^{S,v}=v(\xi)$.

СТ2$^=$. Ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и τ_1, ..., τ_n са термове, то $\omega(\tau_1,...,\tau_n)^{S,v}=I(\omega)(\tau_1{}^{S,v},...,\tau_n{}^{S,v})$.

Стойността на един терм в дадена конфигурация (S,v) ще наричаме още негова *стойност в S при оценка v*.

Последно изменение: 26.07.1999 г.