ЕРБРАНОВИ СТРУКТУРИ

Множеството на всички затворени термове ще означаваме с **H** и ще го наричаме *Ербранов универсум* - по името на логика Жак Ербран (Jacques Herbrand). Очевидно $\mathbf{H}\neq\emptyset$ точно тогава, когато $\Omega_0\neq\emptyset$; затова в случаите, когато използваме Ербрановия универсум, обикновено ще изискваме да съществува поне един нулместен функционален символ. На всеки функционален символ ω от Ω ние ще поставим в съответствие една операция в **H**, която ще наричаме *Ербранова интерпретация на* ω и ще означаваме с $\omega^{\mathbf{H}}$. А именно, ако $\omega\in\Omega_0$, то полагаме $\omega^{\mathbf{H}}$ да бъде нулместната операция ω в **H**, а ако $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, то означаваме с $\omega^{\mathbf{H}}$ n-местната операция в **H**, преобразуваща произволна n-орка $(\tau_1,\dots,\tau_n)$ от затворени термове в затворения терм $\omega(\tau_1,\dots,\tau_n)$.[1] *Ербранова структура* ще наричаме всяка структура (C,I), удовлетворяваща условията, че C е Ербрановият универсум и за всеки функционален символ ω от Ω имаме равенството $I(\omega)=\omega^{\mathbf{H}}$ (разбира се, такива структури съществуват при $\mathbf{H}\neq\emptyset$, т.е при $\Omega_0\neq\emptyset$).

Основна лема за Ербрановите структури. Нека $\Omega_0\neq\emptyset$ и нека S е произволна Ербранова структура. Тогава $\tau^S=\tau$ за всеки затворен терм τ.

Доказателство. Ще използваме индукция, съобразена с индуктивната дефиниция на понятието затворен терм. Нека I е интерпретиращото съответствие на S. Ако $\omega\in\Omega_0$, то $\omega^S=I(\omega)=\omega^{\mathbf{H}}=\omega$. Да предположим сега, че $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове, за които имаме равенствата $\tau_1{}^S=\tau_1, \dots, \tau_n{}^S=\tau_n$. Тогава

$$\omega(\tau_1,\dots,\tau_n)^S=I(\omega)(\tau_1{}^S,\dots,\tau_n{}^S)=\omega^{\mathbf{H}}(\tau_1,\dots,\tau_n)=\omega(\tau_1,\dots,\tau_n).$$

Следствие. При предположенията на горната лема всеки два различни затворени терма (ако съществуват такива) имат различни стойности в S.

Забележка. Уговорката, добавена в скоби в горното следствие, е по повод на това, че би могло да се случи да имаме равенството $\Omega=\Omega_0$ и същевременно множеството Ω_0 да се състои точно от един елемент - очевидно в такъв случай споменатият единствен елемент на Ω_0 би бил и единственият затворен терм.

Ще направим аналогични разглеждания и за случая на конфигурация. Множеството на всички термове ще наричаме *разширен Ербранов универсум* и ще го означаваме с $\mathbf{H}'$ (това множество със сигурност не е празно). На всеки функционален символ ω съпоставяме негова *разширена Ербранова интерпретация* $\omega^{\mathbf{H}'}$, аналогично на направеното преди малко съпоставяне на Ербранова интерпретация, но с тази разлика, че вместо за затворени термове сега става дума за произволни термове. *Ербранова конфигурация* ще наричаме всяка конфигурация от вида (S,v), където носител на S е разширеният Ербранов универсум, интерпретиращото съответствие на S съпоставя на всеки функционален символ от Ω неговата разширена Ербранова интерпретация, а v е тъждественото изображение на множеството Ξ в себе си.

Основна лема за Ербрановите конфигурации. Нека (S,v) е произволна Ербранова конфигурация. Тогава $\tau^{S,v}=\tau$ за всеки терм τ.

Доказателство. Ще използваме индукция, съобразена с индуктивната дефиниция на понятието терм. Нека I е интерпретиращото съответствие на S. Ако $\omega\in\Omega_0$, то $\omega^{S,v}=I(\omega)=\omega^{\mathbf{H}'}=\omega$. Ако $\xi\in\Xi$, то $\xi^{S,v}=v(\xi)=\xi$. Да предположим сега, че $\omega\in\Omega_n$, където $n>0$, и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, за които имаме равенствата $\tau_1{}^{S,v}=\tau_1, \dots, \tau_n{}^{S,v}=\tau_n$. Тогава

$$\omega(\tau_1,\dots,\tau_n)^{S,v}=I(\omega)(\tau_1{}^{S,v},\dots,\tau_n{}^{S,v})=\omega^{\mathbf{H}'}(\tau_1,\dots,\tau_n)=\omega(\tau_1,\dots,\tau_n).$$

Следствие. При предположението на горната лема всеки два различни терма имат различни стойности в (S,v).

Бележка

[1] Обръщаме внимание на твърде различния смисъл, който има означението $(\tau_1,\dots,\tau_n)$ при първото и при второто си появяване в току-що написаното изречение. Първия път имаме обичайното математическо означение на n-ка от обекти (тези обекти са n-те думи $\tau_1, \dots, \tau_n$), а втория път имаме означение на една дума, получена чрез конкатенация от думите $\tau_1, \dots, \tau_n$ и от буквите лява скоба, дясна скоба и запетая (при n=1

запетая фактически не участва). По-прецизно би било да напишем, че $\omega^{\mathbf{H}}$ преобразува $(\tau_1,...,\tau_n)$ в ω"("τ_1","...","τ_n")".

Последно изменение: 9.01.2001 г.