АТОМАРНИ ФОРМУЛИ

Наред с термовете още някои думи над азбуката A, разширена със знаците лява кръгла скоба, дясна кръгла скоба и запетая, ще играят съществена роля в нашите разглеждания. Сега ще дадем съответните дефиниции.

Ще наричаме *атомарни формули* думите от Π_0 и думите от вида $\pi(\tau_1,...,\tau_n)$, където $n>0$, $\pi\in\Pi_n$ и τ_1, ..., τ_n са термове. *Затворени атомарни формули* ще наричаме думите от Π_0 и думите от вида $\pi(\tau_1,...,\tau_n)$, където $n>0$, $\pi\in\Pi_n$ и τ_1, ..., τ_n са затворени термове.

Очевидно затворените атомарни формули са атомарни формули. За да съществува поне една затворена атомарна формула, необходимо и достатъчно е множеството $\Omega_0\cup\Pi_0$ да не е празно. Като се използва обстоятелството, че никой предикатен символ не е същевременно функционален символ или променлива и че функционалните и предикатните символи и променливите не съдържат лява кръгла скоба, веднага се вижда, че никоя дума не е едновременно терм и атомарна формула.

Вярно е следното твърдение за еднозначност на синтактичния анализ на атомарните формули: никоя дума от Π_0 не може да има вида $\pi(\tau_1,...,\tau_n)$, и ако $\pi(\tau_1,...,\tau_n)=\pi'(\tau_1',...,\tau_{n'}')$, където $n>0$, $n'>0$, $\pi\in\Pi_n$, $\pi'\in\Pi_{n'}$ и τ_1, ..., τ_n, τ_1', ..., $\tau_{n'}'$ са термове, то имаме и равенствата $\pi=\pi'$, $n=n'$, $\tau_1=\tau_1'$, ..., $\tau_n=\tau_n'$. Това се доказва с използване на същите две леми, с чиято помощ установихме, че термовете имат еднозначен синтактичен анализ.

Ако $S=(C,I)$ е структура, то на всяка затворена атомарна формула α ще съпоставим число α^S от множеството $\{0,1\}$, което число ще наричаме *стойност на* α *в* S. Това ще направим, като положим $\pi^S=I(\pi)$ за всеки нулместен предикатен символ π и положим $\pi(\tau_1,...,\tau_n)^S=I(\pi)(\tau_1{}^S,...,\tau_n{}^S)$ всеки път, когато $n>0$, $\pi\in\Pi_n$ и τ_1, ..., τ_n са затворени термове. Когато $\alpha^S=1$, ще казваме, че α е *вярна в* S, а когато $\alpha^S=0$ - че α е *невярна в* S.

Ако $S=(C,I)$ е структура, а v е оценка в S на променливите, то на всяка атомарна формула α ще съпоставим число $\alpha^{S,v}$ от множеството $\{0,1\}$, което число ще наричаме *стойност на* α *в* конфигурацията (S,v), а също и *стойност на* α *в* S *при оценка* v. Това ще направим, като положим $\pi^{S,v}=I(\pi)$ за всеки нулместен предикатен символ π и положим

$$\pi(\tau_1,...,\tau_n)^{S,v}=I(\pi)(\tau_1{}^{S,v},...,\tau_n{}^{S,v})$$

всеки път, когато $n>0$, $\pi\in\Pi_n$ и τ_1, ..., τ_n са термове. Когато $\alpha^{S,v}=1$, ще казваме, че α е *вярна в* (S,v) а когато $\alpha^{S,v}=0$ - че α е *невярна в* (S,v) (вместо "в (S,v)" ще казваме също "в S при оценка v").

Сега ще формулираме и докажем едно твърдение, което ще играе много важна роля в по-нататъшната ни работа.

Основна лема за осъществимост. Нека T и F са две непресичащи се множества от атомарни формули. Тогава съществува Ербранова конфигурация, в която всички елементи на T са верни, а всички елементи на F са неверни. Ако множеството Ω_0 не е празно и елементите на T и F са затворени атомарни формули, то съществува и Ербранова структура, в която елементите на T са верни, а елементите на F са неверни.

Доказателство. Нека h е функция от множеството на атомарните формули към множеството $\{0,1\}$, приемаща стойност 1 за всички елементи на T и стойност 0 за всички елементи на F (такава функция съществува поради това, че T и F не се пресичат). Разглеждаме Ербрановата конфигурация (S,v), където интерпретиращото съответствие I на S е такова, че

$$I(\pi)(\tau_1,...,\tau_n)=h(\pi(\tau_1,...,\tau_n))$$

всеки път, когато $\pi\in\Pi_n$, $n>0$ и τ_1, ..., τ_n са елементи на $\mathbf{H}'$, и $I(\pi)=h(\pi)$ за всеки нулместен предикатен символ π. Ще покажем, че така определената Ербранова конфигурация има нужното свойство. За целта е достатъчно да проверим, че за всяка атомарна формула α е в сила равенството

$$\alpha^{S,v}=h(\alpha).$$

Проверката е лесна: ако $\alpha=\pi(\tau_1,...,\tau_n)$, където $\pi\in\Pi_n$, $n>0$ и τ_1, ..., τ_n са термове, то

$$\alpha^{S,v}=I(\pi)(\tau_1{}^{S,v},...,\tau_n{}^{S,v})=I(\pi)(\tau_1,...,\tau_n)=h(\pi(\tau_1,...,\tau_n))=h(\alpha),$$

а ако π е нулместен предикатен символ, то

$$\alpha^{S,v}=I(\pi)=h(\pi)=h(\alpha).$$

Да предположим сега, че множеството Ω_0 не е празно и елементите на T и F са затворени атомарни формули. Разглеждаме Ербрановата структура S_0, при която интерпретиращото съответствие се определя върху предикатните символи по същия начин, както беше определено по-горе интерпретиращото съответствие I, но с тази разлика, че вместо произволни термове се разглеждат затворени. Тогава за всяка затворена атомарна формула α е в сила равенството

$$\alpha^{S_0}=h(\alpha)$$

и следователно в S_0 елементите на T са верни, а елементите на F - неверни.

Следствие. Нека T и F са две множества от атомарни Σ-формули. За да съществува конфигурация, в която всички елементи на T са верни, а всички елементи на F са неверни, необходимо и достатъчно е множествата T и F да нямат общи елементи. В случай, че множеството Ω_0 не е празно и елементите на T и F са затворени атомарни формули, същото условие е необходимо и достатъчно и за съществуването на структура, в която всички елементи на T са верни, а всички елементи на F - неверни.

Последно изменение: 7.10.2004 г.