СЪКРАТЕНО ЗАПИСВАНЕ НА ФОРМУЛИТЕ

Ние осигурихме еднозначност на синтактичния анализ на формулите, като в дефиницията на понятието формула предвидихме писане на кръгли скоби в началото и в края на всяка конюнкция и на всяка дизюнкция. Това често води до наличието на голям брой скоби в по-сложните формули. Сега ще приемем някои уславяния, които ще ни позволят да пропускаме част от тези скоби.

Първо ще дефинираме индуктивно понятието *молекула*), като всички молекули ще бъдат думи над азбуката A, разширена със знаците "(", ")", "[", "]", "<", ">", ",", "¬", "&" и "∨". Дефиницията се състои от следните приемания, като в третото от тях под "двувалентни логически знаци" разбираме знаците "&" и "∨":

M1. Всяка атомарна формула е молекула.
M2. Ако φ е молекула, то думата $\neg\varphi$ също е молекула.
M3,4. Ако думите $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, където $n \geq 2$, са молекули, а $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ са двувалентни логически знаци, то думата $(\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{n-1}\varphi_n)$ също е молекула.
M5. Ако φ е молекула, а ξ е променлива, то думата $[\xi]\varphi$ също е молекула.
M6. Ако φ е молекула, а ξ е променлива, то думата $<\xi>\varphi$ също е молекула.

С очевидна индукция се показва, че всяка формула е и молекула. Обратното твърдение разбира се не е вярно - например дума от вида $(\alpha\&\alpha\&\alpha)$, където α е атомарна формула, представлява молекула, но не е формула.

Двете леми, с помощта на които доказахме еднозначността на синтактичния анализ на формулите, остават в сила и за молекулите. Като използваме така получената по-обща форма на лемите, лесно можем да се убедим, че и при молекулите имаме еднозначност на синтактичния анализ.

Да наречем *квазиформули* думите от вида $\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{n-1}\varphi_n$, където $n \geq 1$ (при $n=1$ считаме, че думата е φ_1), $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ са молекули, а $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ са двувалентни логически знаци. Съобразява се, пак с помощта на обобщените две леми, че и квазиформулите имат еднозначен синтактичен анализ.

Ние ще разглеждаме квазиформулите (в частност молекулите) като съкратени записи на формули. За целта ще дадем индуктивна дефиниция кога една квазиформула е *съкращение* за дадена формула:[1]
C1. Всяка атомарна формула е съкращение за себе си.
C2. Ако φ е молекула и φ е съкращение за дадена формула φ', то молекулата $\neg\varphi$ е съкращение за формулата $\neg\varphi'$.
C3. Ако думите $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, където $n \geq 2$, са молекули, квазиформулата $\varphi_1\&\varphi_2\&...\&\varphi_{n-1}$ е съкращение за дадена формула θ, а молекулата φ_n е съкращение за дадена формула χ, то квазиформулата $\varphi_1\&\varphi_2\&...\&\varphi_{n-1}\&\varphi_n$ е съкращение за формулата $(\theta\&\chi)$.
C4. Ако думите $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, където $n \geq 2$, са молекули, k е някое от числата 1, 2, ..., n-1, квазиформулата $\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{k-1}\varphi_k$, където $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{k-1}$ са двувалентни логически знаци, е съкращение за дадена формула θ, а квазиформулата $\varphi_{k+1}\&...\&\varphi_n$ е съкращение за дадена формула χ, то квазиформулата $\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{k-1}\varphi_k\vee\varphi_{k+1}\&...\&\varphi_n$ е съкращение за формулата $(\theta\vee\chi)$.
C5. Ако φ е молекула, която е съкращение за дадена формула φ', а ξ е променлива, то молекулата $[\xi]\varphi$ е съкращение за формулата $[\xi]\varphi'$.
C6. Ако φ е молекула, която е съкращение за дадена формула φ', а ξ е променлива, то молекулата $<\xi>\varphi$ е съкращение за формулата $<\xi>\varphi'$.
C7. Ако думите $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, където $n \geq 2$, са молекули, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ са двувалентни логически знаци и квазиформулата $\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{n-1}\varphi_n$ е съкращение за дадена формула θ, то молекулата $(\varphi_1\gamma_1\varphi_2\gamma_2...\gamma_{n-1}\varphi_n)$ също е съкращение за θ.

Пример. Ако $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ са атомарни формули, то квазиформулата $(\alpha_1\vee\alpha_2)\&(\alpha_3\&\alpha_4\vee\alpha_5\&\alpha_6)$ е съкращение за формулата $((\alpha_1\vee\alpha_2)\&((\alpha_3\&\alpha_4)\vee(\alpha_5\&\alpha_6)))$. Действително, $\alpha_1\vee\alpha_2$ е съкращение за формулата $(\alpha_1\vee\alpha_2)$ съгласно C1 и C4, $\alpha_3\&\alpha_4$ и $\alpha_5\&\alpha_6$ са съкращения съответно за формулите $(\alpha_3\&\alpha_4)$ и $(\alpha_5\&\alpha_6)$ съгласно C1 и C3, откъдето по C4 получаваме, че $\alpha_3\&\alpha_4\vee\alpha_5\&\alpha_6$ е съкращение за формулата $((\alpha_3\&\alpha_4)\vee(\alpha_5\&\alpha_6))$. Прилагайки C7, заключаваме, че и молекулите $(\alpha_1\vee\alpha_2)$ и $(\alpha_3\&\alpha_4\vee\alpha_5\&\alpha_6)$ също са съкращения съответно за $(\alpha_1\vee\alpha_2)$ и за $((\alpha_3\&\alpha_4)\vee(\alpha_5\&\alpha_6))$, а оттук изказаното в началото твърдение се получава по C3.

С индукция, съобразена с индуктивната дефиниция на понятието формула, се вижда лесно, че всяка формула е съкращение за себе си. Еднозначният синтактичен анализ на молекулите и на квазиформулите позволява да докажем, че произволна квазиформула е съкращение точно на една формула (доказателството може да се извърши с помощта на индукция относно дължината на разглежданата квазиформула, като индуктивната стъпка представлява доказателство, че ако всички квазиформули с дължина, по-малка от дадено число, имат доказаното свойство, то това свойство е налице и за квазиформулите с дължина, равна на даденото число).

Оттук нататък, допускайки волност на езика, понякога, вместо да говорим за дадена формула, ние ще си позволяваме да говорим за някоя квазиформула, която е нейно съкращение - например да казваме "формулата $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \& (\alpha_3 \& \alpha_4 \vee \alpha_5 \& \alpha_6)$", вместо да казваме "формулата, имаща съкращение $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \& (\alpha_3 \& \alpha_4 \vee \alpha_5 \& \alpha_6)$" или "формулата $((\alpha_1 \vee \alpha_2) \& ((\alpha_3 \& \alpha_4) \vee (\alpha_5 \& \alpha_6)))$".

Бележка

[1] В дефиницията са залегнали следните три идеи: а) разрешава се да се изпускат най-външните скоби, които идват от образуването на конюнкция или дизюнкция; б) приема се, че отрицанието и квантификацията имат приоритет пред операцията конюнкция, а тя пък - пред операцията дизюнкция; в) операциите конюнкция и дизюнкция се извършват по реда им отляво надясно, когато скоби или съображения за приоритет не определят друг ред на извършването им.

Последно изменение: 9.01.2001 г.

Previous	Next	Contents