ИМПЛИКАЦИЯ И ЕКВИВАЛЕНЦИЯ

За всеки две формули φ и ψ ще означаваме с $\varphi\rightarrow\psi$ формулата $(\neg\varphi\vee\psi)$, а с $\varphi\leftrightarrow\psi$ - формулата $((\varphi\rightarrow\psi)\&(\psi\rightarrow\varphi))$. Първата от тези формули ще наричаме *импликация от* φ *към* ψ и ще я четем "ако φ, то ψ", а втората ще наричаме *еквиваленция на* φ *и* ψ и ще я четем "φ е равносилно на ψ". Формулите φ и ψ ще наричаме съответно *предпоставка* и *заключение* на импликацията $\varphi\rightarrow\psi$ и *лява страна* и *дясна страна* на еквиваленцията $\varphi\leftrightarrow\psi$. От дефиницията за импликация получаваме, че формулата $\varphi\rightarrow\psi$ е невярна в дадена структура при дадена оценка на променливите тогава и само тогава, когато в тази структура и при тази оценка формулата φ е вярна, а формулата ψ е невярна. Като използваме това и дефиницията за еквиваленция, виждаме, че за всяка структура S и всяка оценка v в S на променливите са в сила следните твърдения:

$$(\varphi\rightarrow\psi)^{S,v} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \varphi^{S,v}\leq\psi^{S,v}, \\ 0 & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

$$(\varphi\leftrightarrow\psi)^{S,v} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \varphi^{S,v}=\psi^{S,v}, \\ 0 & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

$$S,v\vDash\varphi\rightarrow\psi \quad\Leftrightarrow\quad \text{ако } S,v\vDash\varphi, \text{ то } S,v\vDash\psi,$$ [1]

$$S,v\vDash\varphi\leftrightarrow\psi \quad\Leftrightarrow\quad S,v\vDash\varphi \text{ е равносилно с } S,v\vDash\psi.$$

Забележка. Валидността на тези твърдения бихме могли да осигурим и чрез уславяне под $\varphi\rightarrow\psi$ да разбираме формулата $\neg(\varphi\&\neg\psi)$. Последната формула, макар и малко по-сложна от формулата $(\neg\varphi\vee\psi)$, в известен смисъл, който ще бъде уточнен по-нататък, не е съществено различна от нея.

Когато използваме означенията за импликация и за еквиваленция в сложни формули, ние ще пишем скоби, за да е ясен редът на действията, но обикновено ще си спестяваме писането на част от скобите с приемане, че операциите импликация и еквиваленция имат равен приоритет, по-нисък отколкото при отрицанието, квантификацията, конюнкцията и дизюнкцията (това би могло да се прецизира с помощта на подходящо разширение на понятията молекула и квазиформула и на отношението дадена квазиформула да е съкращение за дадена формула). Например ще считаме, че изразът $\alpha_1\&\alpha_2\rightarrow\alpha_3\vee\alpha_4$, където α_1, α_2, α_3 и α_4 са атомарни формули, означава формулата $(\alpha_1\&\alpha_2)\rightarrow(\alpha_3\vee\alpha_4)$, т.е. формулата $(\neg(\alpha_1\&\alpha_2)\vee(\alpha_3\vee\alpha_4))$.

Бележка

[1] Придържаме се към подходящата за математиката уговорка, че "ако А, то Б" означава невъзможност да е налице А, без да е налице Б.

Последно изменение: 9.01.2001 г.