СВОБОДНИ И СВЪРЗАНИ ПРОМЕНЛИВИ

Когато една формула започва с квантор, неговата променлива играе особена роля - стойността на формулата в произволна структура при коя да е оценка на променливите не зависи от стойността на оценката за споменатата променлива. Това обстоятелство дава повод да се дефинира понятието *свързана променлива* на една формула. Дефиницията е индуктивна и се състои от следните точки, където ξ означава произволна дадена променлива:

СВЪ1,2. Ако φ е формула, то ξ е свързана променлива на $\forall\xi\varphi$ и ξ е свързана променлива на $\exists\xi\varphi$.

СВЪ3. Ако ξ е свързана променлива на дадена формула φ, то ξ е свързана променлива и на $\neg\varphi$.

СВЪ4,5. Ако ξ е свързана променлива на някоя от формулите φ_1 и φ_2, то ξ е свързана променлива на $(\varphi_1\&\varphi_2)$ и ξ е свързана променлива на $(\varphi_1\vee\varphi_2)$.

СВЪ6,7. Ако ξ е свързана променлива на дадена формула φ, а η е произволна променлива, то ξ е свързана променлива на $\forall\eta\varphi$ и ξ е свързана променлива на $\exists\eta\varphi$.

От тази дефиниция могат да се извлекат следните заключения:

а) атомарните формули нямат свързани променливи;

б) ако φ е формула, то една променлива е свързана променлива на $\neg\varphi$ точно тогава, когато е свързана променлива на φ;

в) ако φ_1 и φ_2 са формули, а γ е двувалентен логически знак, то една променлива е свързана променлива на $(\varphi_1\gamma\varphi_2)$ точно тогава, когато е свързана променлива на φ_1 или е свързана променлива на φ_2;

г) ако φ е формула, η е променлива и κ е някой от кванторите $\forall\eta$ и $\exists\eta$, то една променлива е свързана променлива на $\kappa\varphi$ точно тогава, когато съвпада с η или е свързана променлива на φ.

Горните твърдения позволяват да се докаже по индукция, че за всяка дадена формула множеството на нейните свързани променливи е крайно.

Със следващата дефиниция, която ще дадем, ще въведем понятието *свободна променлива*, при това ще го въведем и за термове, и за формули. Дефиницията е пак индуктивна. Състои се от следните точки, където ξ е произволна променлива:

СВО1. ξ е свободна променлива на ξ.

СВО2. Ако σ принадлежи на $\Omega_n\cup\Pi_n$, където $n>0$, $\tau_1, ..., \tau_n$ са термове и ξ е свободна променлива на поне един от тези термове, то ξ е свободна променлива на $\sigma(\tau_1,...,\tau_n)$.

СВО3. Ако ξ е свободна променлива на дадена формула φ, то ξ е свободна променлива и на $\neg\varphi$.

СВО4,5. Ако ξ е свободна променлива на някоя от формулите φ_1 и φ_2, то ξ е свободна променлива на $(\varphi_1\&\varphi_2)$ и ξ е свободна променлива на $(\varphi_1\vee\varphi_2)$.

СВО6,7. Ако ξ е свободна променлива на дадена формула φ, а η е променлива, различна от ξ, то ξ е свободна променлива на $\forall\eta\varphi$ и ξ е свободна променлива на $\exists\eta\varphi$.

Винаги, когато θ е терм или формула, ние ще означаваме със СВО(θ) множеството на свободните променливи на θ. От дадената по-горе индуктивна дефиниция се получават следните заключения:

а) за всяка променлива ξ е в сила равенството $\text{СВО}(\xi)=\{\xi\}$;

б) ако λ принадлежи на $\Omega_0\cup\Pi_0$, то $\text{СВО}(\lambda)=\varnothing$;

в) ако λ принадлежи на $\Omega_n\cup\Pi_n$, където $n>0$, а $\tau_1, ..., \tau_n$ са термове, то

$$\text{СВО}(\lambda(\tau_1,...,\tau_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \text{СВО}(\tau_i);$$

г) за всяка формула φ е в сила равенството $\text{СВО}(\neg\varphi)=\text{СВО}(\varphi)$;

д) за всеки две формули φ_1 и φ_2 са в сила равенствата

$$\text{СВО}(\varphi_1\&\varphi_2)=\text{СВО}(\varphi_1\vee\varphi_2)=\text{СВО}(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)=\text{СВО}(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)=\text{СВО}(\varphi_1)\cup\text{СВО}(\varphi_2);$$

е) за всяка формула φ и всяка променлива η са в сила равенствата

$$\text{СВО}(\forall\eta\varphi)=\text{СВО}(\exists\eta\varphi)=\text{СВО}(\varphi)\setminus\{\eta\}.$$

От тези твърдения следва разбира се, че за всеки терм и за всяка формула съответното множество на свободните променливи е крайно. При формулите няма никаква задължителна връзка между множеството на свързаните и множеството на свободните променливи;[1] все пак понякога ще предпочитаме да работим с такива формули, на които множеството на свободните променливи няма общи елементи с множеството на свързаните променливи.

С индукция, съобразена с дефиницията на понятието затворен терм, се показва, че затворените термове нямат свободни променливи, а с индукция, съобразена с дефиницията на понятието терм, се доказва, че всеки терм е затворен или има поне една свободна променлива. Оттук се получава, че един терм е затворен точно тогава, когато той няма свободни променливи. Същото веднага се пренася и за атомарни формули: една атомарна формула е затворена точно тогава, когато тя няма свободни променливи. Това ни дава повод за следната обща дефиниция: една формула ще наричаме *затворена*, ако тази формула няма свободни променливи.

Пример. Ако p е едноместен предикатен символ, а x е променлива, то формулите $\forall x p(x)$ и $\exists x p(x)$ са затворени, макар че при тяхното построяване е използвана променливата x (тя е тяхна свързана променлива).

В нашите разглеждания понятието свободна променлива ще играе значителна роля благодарение на следното твърдение, което ще докажем:

Лема за базисна роля на свободните променливи. Нека S е дадена структура. Тогава всеки път, когато μ е терм или формула, а v и v' са две оценки, които съвпадат върху свободните променливи на μ,[2] в сила е равенството

$$\mu^{S,v}=\mu^{S,v'}.$$

Доказателство. Да положим $S=(C,I)$. В случая, когато μ е терм, използваме индукция, съобразена с дефиницията на понятието терм. Очевидно твърдението е вярно, ако μ е нулместен функционален символ или променлива, а ако ω е n- местен функционален символ, където $n>0$, и $\tau_1, ..., \tau_n$ са термове, притежаващи доказваното свойство, то при всеки избор на оценки v и v', съвпадащи върху свободните променливи на терма $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$, тези оценки ще съвпадат и върху свободните променливи на кой да е от термовете $\tau_1, ..., \tau_n$, поради което ще имаме

$$\omega(\tau_1,...,\tau_n)^{S,v}=I(\omega)(\tau_1^{S,v},...,\tau_n^{S,v})=I(\omega)(\tau_1^{S,v'},...,\tau_n^{S,v'})=\omega(\tau_1,...,\tau_n)^{S,v'},$$

т.е. термът $\omega(\tau_1,...,\tau_n)$ също има въпросното свойство. В случая, когато μ е формула, доказателството протича с индукция, съобразена с дефиницията на понятието формула. Ако μ е нулместен предикатен символ, верността на твърдението е очевидна, а за по-сложните атомарни формули проверката е чрез разсъждения, аналогични на горните. Ако твърдението е вярно за дадена формула φ, а v и v' са оценки, съвпадащи за свободните променливи на формулата $\neg\varphi$, то v и v' разбира се съвпадат за свободните променливи на φ и следователно

$$(\neg\varphi)^{S,v}=1-\varphi^{S,v}=1-\varphi^{S,v'}=(\neg\varphi)^{S,v'},$$

т.е. формулата $\neg\varphi$ също има доказваното свойство. Ако дадени формули φ_1 и φ_2 имат въпросното свойство, а v и v' са оценки, съвпадащи за свободните променливи на формулата $(\varphi_1\&\varphi_2)$, то v и v' ще съвпадат както за свободните променливи на φ_1, така и за свободните променливи на φ_2, следователно

$$(\varphi_1\&\varphi_2)^{S,v}=\min\{\varphi_1^{S,v},\varphi_2^{S,v}\}=\min\{\varphi_1^{S,v'},\varphi_2^{S,v'}\}=(\varphi_1\&\varphi_2)^{S,v'}$$

и значи формулата $(\varphi_1\&\varphi_2)$ също има нужното свойство. По съвсем подобен начин се доказва и запазването на свойството при образуване на дизюнкция. Сега ще покажем, че то се запазва и при поставяне на квантор за общност. Нека φ е формула, която притежава разглежданото свойство, ξ е променлива, а v и v' са оценки, които съвпадат върху свободните променливи на формулата $\forall\xi\varphi$. Тогава за всеки елемент c на C оценките v_ξ^c и v'^c_ξ съвпадат върху свободните променливи на формулата φ, защото коя да е свободна променлива на φ съвпада с ξ или е свободна променлива на $\forall\xi\varphi$. Оттук виждаме, че

$$(\forall\xi\varphi)^{S,v}=\min\left\{\varphi^{S,v_\xi^c}\,\middle|\,c\in C\right\}=\min\left\{\varphi^{S,v'^c_\xi}\,\middle|\,c\in C\right\}=(\forall\xi\varphi)^{S,v'},$$

т.е. формулата $\forall\xi\varphi$ също има доказваното свойство. Запазването на свойството при поставяне на квантор за съществуване се доказва съвсем аналогично.

Следствие. Ако μ е затворен терм или затворена формула, то $\mu^{S,v}=\mu^{S,v'}$ за всеки две оценки v и v' в S на променливите.

Горното следствие показва, че когато μ е затворен терм или затворена формула, стойността $\mu^{S,v}$ не зависи от избора на оценката v в S на променливите. В случая, когато μ е затворен терм, това следва и от известното ни равенство $\mu^{S,v}=\mu^S$, което е налице в този случай. Вземайки повод от верността на това равенство за произволен затворен терм μ, осигуряваме неговата вярност и в случая, когато μ е затворена формула, като се уславяме независещата от избора на v стойност $\mu^{S,v}$ да означаваме с μ^S; тази независеща от избора на v стойност ще наричаме *стойност на* μ *в* S. Ако μ е затворена формула, то при $\mu^S=1$ ще казваме, че μ е *вярна в* S, а при $\mu^S=0$ ще казваме, че μ е *невярна в* S. Очевидно верността на една затворена формула в S е равносилна с нейната тъждествена вярност в S. Поради това факта, че дадена затворена формула μ е вярна в S, можем да запишем, като пишем $S \vDash \varphi$; разбира се отрицанието на този факт, т.е. неверността на φ в S, можем да запишем, като пишем $S \nvDash \varphi$.

За произволна формула φ, на която свободните променливи са $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, формулата $\forall\xi_1\forall\xi_2...\forall\xi_n\varphi$ очевидно е затворена (затворена формула от този вид ще наричаме *затваряне на* φ). Следствието от лемата за запазване на тъждествената вярност при поставяне или премахване на квантор за общност показва, че споменатата затворена формула е вярна в дадена структура точно тогава, когато формулата φ е тъждествено вярна в същата структура.

Бележки

[1] Лесно може да се види, че ако $\Pi_n \neq \varnothing$ поне за едно n, различно от 0, то съществува формула, на която множеството на свързаните променливи и множеството на свободните променливи са произволни отнапред избрани крайни множества от променливи.

[2] Последното условие се счита изпълнено и в случая, когато μ няма свободни променливи.

Последно изменение: 9.01.2001 г.

Previous	Next	Contents