СЛЕДВАНЕ НА ЕДНА ФОРМУЛА ОТ ДРУГА. ЕКВИВАЛЕНТНИ ФОРМУЛИ

За една конфигурация (S,v) ще казваме, че *удовлетворява* дадена формула θ, ако θ е вярна в структурата S при оценката v; в този случай казваме също, че θ е вярна в конфигурацията (S,v).

Нека φ и ψ са формули. Ще казваме, че от φ *следва* ψ, и ще пишем $\varphi \vDash \psi$, ако всяка конфигурация, която удовлетворява φ, удовлетворява и ψ. Ще казваме, че φ *е еквивалентна на* ψ, и ще пишем $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$, ако конфигурациите, които удовлетворяват φ, и конфигурациите, които удовлетворяват ψ, са едни и същи. Очевидно условието $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$ е равносилно с това да бъдат едновременно изпълнени условията $\varphi \vDash \psi$ и $\psi \vDash \varphi$.

Пример 1. За всеки две формули φ_1 и φ_2 имаме съотношенията

$$\varphi_1\&\varphi_2 \vDash \varphi_1,\ \varphi_1\&\varphi_2 \vDash \varphi_2,\ \varphi_1 \vDash \varphi_1\vee\varphi_2,\ \varphi_2 \vDash \varphi_1\vee\varphi_2,$$

а също и съотношението $\varphi_1\to\varphi_2 \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(\varphi_1\&\neg\varphi_2)$.

Пример 2. За всеки три формули φ_1, φ_2, θ, ако $\theta \vDash \varphi_1$ и $\theta \vDash \varphi_2$, то $\theta \vDash \varphi_1\&\varphi_2$, а ако $\varphi_1 \vDash \theta$ и $\varphi_2 \vDash \theta$, то $\varphi_1\vee\varphi_2 \vDash \theta$.

Лесно се съобразява, че $\varphi \vDash \psi$ точно тогава, когато за всяка конфигурация (S,v) е в сила неравенството $\varphi^{S,v}\leq\psi^{S,v}$, а $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$ точно тогава, когато за всяка конфигурация (S,v) имаме равенството $\varphi^{S,v}=\psi^{S,v}$. Това показва, че въведените две понятия са свързани по следния начин с операциите импликация и еквиваленция: $\varphi \vDash \psi$ точно тогава, когато импликацията $\varphi\to\psi$ е тъждествено вярна, а $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$ точно тогава, когато е тъждествено вярна еквиваленцията $\varphi\leftrightarrow\psi$.

Налице са следните лесно проверими свойства на отношението следване, където φ, ψ, θ, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 са произволни формули, а ξ е произволна променлива:
а) $\varphi \vDash \varphi$;
б) ако $\varphi \vDash \psi$ и $\psi \vDash \theta$, то $\varphi \vDash \theta$;
в) ако $\varphi \vDash \psi$, то $\neg\psi \vDash \neg\varphi$;
г) ако $\varphi_1 \vDash \psi_1$ и $\varphi_2 \vDash \psi_2$, то $\varphi_1\&\varphi_2 \vDash \psi_1\&\psi_2$ и $\varphi_1\vee\varphi_2 \vDash \psi_1\vee\psi_2$;
д) ако $\varphi \vDash \psi$, то $\forall\xi\varphi \vDash \forall\xi\psi$ и $\exists\xi\varphi \vDash \exists\xi\psi$.
От тези свойства и от отбелязаната връзка между следване и еквивалентност веднага получаваме подобни свойства на отношението еквивалентност:
а′) $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi$;
б′) ако $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$ и $\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \theta$, то $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \theta$;
в′) ако $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$, то $\neg\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi$;
г′) ако $\varphi_1 \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi_1$ и $\varphi_2 \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi_2$, то $\varphi_1\&\varphi_2 \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi_1\&\psi_2$ и $\varphi_1\vee\varphi_2 \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi_1\vee\psi_2$;
д′) ако $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$, то $\forall\xi\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \forall\xi\psi$ и $\exists\xi\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists\xi\psi$.
Разбира се от връзката между следване и еквивалентност непосредствено се вижда, че отношението еквивалентност е и симетрично: ако $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$, то $\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi$.

Следните еквивалентности са в сила при всеки избор на формулите φ, ψ, θ и на променливата ξ (проверката може да се извърши, като се покаже, че за всяка от еквивалентностите формулата отляво и формулата отдясно имат равни стойности във всяка конфигурация):

$$\varphi\&\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi,\quad \varphi\vee\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi,$$
$$\varphi\&\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi\&\varphi,\quad \varphi\vee\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi\vee\varphi,$$
$$(\varphi\&\psi)\&\theta \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi\&(\psi\&\theta),\quad (\varphi\vee\psi)\vee\theta \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi\vee(\psi\vee\theta),$$
$$(\varphi\vee\psi)\&\theta \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi\&\theta)\vee(\psi\&\theta),\quad (\varphi\&\psi)\vee\theta \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi\vee\theta)\&(\psi\vee\theta),$$
$$(\varphi\vee\psi)\&\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi,\quad (\varphi\&\psi)\vee\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi,$$
$$\neg\neg\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi,\quad \neg(\varphi\&\psi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi\vee\neg\psi,\quad \neg(\varphi\vee\psi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi\&\neg\psi,\quad \neg\forall\xi\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists\xi\neg\varphi,\quad \neg\exists\xi\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \forall\xi\neg\varphi.$$

Последно изменение: 26.07.1999 г.