

## УНИВЕРСАЛНИ ФОРМУЛИ. МЕТОД НА ЕРБРАН ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ ЗА ИЗПЪЛНИМОСТ

Една формула ще наричаме *универсална*, ако тя има вида  $\forall \xi_1 \forall \xi_2 \dots \forall \xi_n \phi$ , където  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  ( $n \geq 0$ ) са променливи, а  $\phi$  е безкванторна формула (ще я наричаме *безкванторна част* или *матрица* на формулата  $\forall \xi_1 \forall \xi_2 \dots \forall \xi_n \phi$ ). Това, че в изказаната дефиниция допускаме  $n$  да е 0, осигурява и безкванторните формули да могат да се считат за универсални. Очевидно всяка безкванторна формула представлява безкванторна част на някоя затворена универсална формула.

**Забележка 1.** Ако в горната дефиниция поискаме допълнително променливите  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  да бъдат две по две различни, ние бихме стеснили обема на понятието универсална формула, но това ограничение не би било особено съществено, защото всяка формула, универсална в първоначалния смисъл би била еквивалентна на формула, универсална в новия смисъл (получена чрез премахване на повторенията на квантори).

За произволно множество от формули ние сме дефинирали понятията изпълнимост и силна изпълнимост, като за множества от затворени формули тези две понятия са еквивалентни. Сега ще се занимаем по-подробно с въпроса за изпълнимост и за силна изпълнимост на множества от универсални формули.

За да бъде една универсална формула твърдествено вярна в дадена структура  $S$ , необходимо и достатъчно е безкванторната част на формулата да бъде твърдествено вярна в  $S$ . Поради това едно множество  $M$  от универсални формули е силно изпълнимо точно тогава, когато е силно изпълнимо множеството на безкванторните части на формулите от  $M$  (нещо повече, двете множества имат едни и същи модели). В частност, ако  $M$  е множество от затворени универсални формули, то е налице равностойност между изпълнимост на  $M$  и силна изпълнимост на множеството на безкванторните части на формулите от  $M$ . Засега ще оставим настрана въпроса как да изследваме дали е изпълнимо произволно множество от универсални формули и ще се ограничим с изследване в това отношение на множества от затворени универсални формули. Това е равностойно с изследване за силна изпълнимост на множества от безкванторни формули (а значи и с изследване за силна изпълнимост на произволни множества от универсални формули). Ще изложим един метод на Ербран за споменатия вид изследване.

Да наречем *конкретизации* на една затворена универсална формула затворените частни случаи на нейната безкванторна част. Методът на Ербран може да бъде описан чрез следното твърдение:

**Необходимо и достатъчно условие за изпълнимост на множество от затворени универсални формули.** Ако съществува поне един нулместен функционален символ, то за да бъде изпълнимо едно множество  $M$  от затворени универсални формули, необходимо и достатъчно е да е изпълнимо множеството на всички техни конкретизации, при това в този случай съществува и Ербранова структура, която е модел на  $M$ .

**Доказателство.** Нека съществува поне един нулместен функционален символ и нека е дадено едно множество  $M$  от затворени универсални формули. Да означим с  $K$  множеството на всички конкретизации на формулите от  $M$ . Ако множеството  $M$  е изпълнимо и дадена структура  $S$  е модел на  $M$ , то безкванторните части на формулите от  $M$  ще бъдат твърдествено верни в  $S$  и следователно формулите от  $K$ , бидейки затворени частни случаи на такива безкванторни части, ще бъдат верни в  $S$ , т.е.  $S$  ще бъде модел и на множеството  $K$ . Значи ако  $M$  е изпълнимо, то и  $K$  е изпълнимо. Да предположим сега, че множеството  $K$  е изпълнимо. Тъй като  $K$  е множество от затворени безкванторни формули, лемата за Ербранова изпълнимост на множество от безкванторни формули позволява да заключим, че съществува Ербранова структура  $S$ , която е модел на  $K$ . Ако  $\phi$  е безкванторната част на произволна формула от  $M$ , то всички затворени частни случаи на  $\phi$  ще принадлежат на  $K$  и значи ще бъдат верни в  $S$ , следователно  $\phi$  ще бъде твърдествено вярна в  $S$  (използваме следствието от достатъчното условие за твърдествена вярност при вярност на затворените частни случаи). И така, безкванторните части на всички формули от  $M$  се оказват твърдествено верни в  $S$ , а това показва, че всички формули от  $M$  са верни в  $S$ , т.е. Ербрановата структура  $S$  е модел на  $M$  и значи  $M$  е изпълнимо.

**Забележка 2.** Съществуването на нулместен функционален символ не ни гарантира в общия случай, че ако множеството  $K$  на конкретизациите на формулите от  $M$  е изпълнимо, то всеки модел на  $K$  е модел и на  $M$ . В това можем да се убедим, като забележим, че ако при условията на пример 2 от предходния въпрос положим  $M = \{ \forall \xi \pi(\xi) \}$ , то  $K$  ще бъде едноелементното множество  $\{ \pi(\omega) \}$  и разгледаната в примера структура  $S$  ще е модел на  $K$  без да е модел на  $M$ .

Сега ще разгледаме някои примери за приложение на току-що доказаната теорема.

**Пример 1** (задачата за бръснаря). Може ли да съществува бръснар, който бръсне точно онези мъже, които не се бръснат сами (има се пред вид някое дадено множество от мъже, на което да принадлежи и самият бръснар)? Добре е известно разсъдението, което показва, че такъв бръснар не би могъл да съществува, тъй като в противен случай би се получило противоречие по въпроса дали той да бръсне или да не бръсне себе си. Сега ще видим как може да се приложи горната теорема при тази задача. За целта записваме изискването на задачата в език на предикатното смятане с един нулместен функционален символ  $b$  и един двуместен предикатен символ  $s$ , като интуитивно тълкуваме  $b$  като означение на въпросния бръснар, а  $s(x,y)$  - като "x бръсне y". По този начин поставеният въпрос се представя като въпрос за изпълнимост на формулата

$$\forall x(s(b,x) \leftrightarrow \neg s(x,x)),$$

където  $x$  е променлива. Очевидно тази формула е универсална. При направения избор на език на предикатното смятане съществува точно един затворен терм - нулместният функционален символ  $b$ . Поради това написаната универсална формула има точно една конкретизация - резултатът от прилагане на субституцията  $(x:=b)$  към безкванторната част на формулата, а този резултат е формулата

$$s(b,b) \leftrightarrow \neg s(b,b).$$

Тъй като формулите  $s(b,b)$  и  $\neg s(b,b)$  не могат да имат една и съща стойност в никоя структура, споменатата конкретизация не е изпълнима. Прилагайки доказаната теорема за множеството  $M = \{\forall x(s(b,x) \leftrightarrow \neg s(x,x))\}$ , заключаваме, че формулата, чрез която записахме условието на задачата за бръснаря, не е изпълнима. Забелязва се, че начинът, по който установихме този факт, има близост със споменатото в началото разсъждение с това, че в разглежданията се появява формулата  $s(b,b)$ , чието интуитивно тълкуване е "б бръсне себе си".

**Пример 2.** Може ли да съществуват двама бръснари, такива, че всеки от тях да бръсне точно онези мъже, които не ги бръсне другият и не се бръснат сами (има се пред вид дадено множество от мъже, на което да принадлежат и двамата бръснари)? За да запишем изискването на задачата със средствата на предикатното смятане, ще използваме език с два нулместни функционални символа  $b_1$  и  $b_2$  (знаци за "първи бръснар" и "втори бръснар") и двуместен предикатен символ  $s$  със същото тълкуване както в предходния пример. Въпросът тогава се представя като въпрос за изпълнимост на множеството  $M$  от двете универсални формули

$$\forall x(s(b_1,x) \leftrightarrow \neg s(b_2,x) \& \neg s(x,x)), \quad \forall x(s(b_2,x) \leftrightarrow \neg s(b_1,x) \& \neg s(x,x)),$$

където  $x$  е променлива. В случая съществуват точно два затворени терма - нулместните функционални символи  $b_1$  и  $b_2$ . Поради това множеството  $K$  на всички конкретизации на формулите от  $M$  се състои от следните четири формули:

$$s(b_1,b_1) \leftrightarrow \neg s(b_2,b_1) \& \neg s(b_1,b_1),$$

$$s(b_1,b_2) \leftrightarrow \neg s(b_2,b_2) \& \neg s(b_2,b_2),$$

$$s(b_2,b_1) \leftrightarrow \neg s(b_1,b_1) \& \neg s(b_1,b_1),$$

$$s(b_2,b_2) \leftrightarrow \neg s(b_1,b_2) \& \neg s(b_2,b_2).$$

По доказаната теорема изпълнимостта на  $M$  е равносилна с изпълнимост на  $K$ . Понеже  $K$  е крайно множество от безкванторни формули, няма принципна пречка въпросът за изпълнимост на  $K$  да се изследва по начина, набелязан във въпроса за безкванторни формули (т.е. чрез лемата за двоичните функции, съответни на безкванторни формули) - това би довело до изследване дали има точка, в която четири конкретни двоични функции на четири променливи приемат едновременно стойност 1. За да спестим труд, ще постъпим малко по-иначе, а именно, ще изследваме какви стойности би трябвало да имат в една структура  $S$  атомарните подформули на формулите от  $K$ , за да бъде тази структура модел на  $K$ . Лесно се вижда, че условията, за да бъдат верни в  $S$  първата и четвъртата формула от  $K$ , са следните:

$$s(b_1,b_1)^S = 0, \quad s(b_2,b_1)^S = 1, \quad s(b_2,b_2)^S = 0, \quad s(b_1,b_2)^S = 1.$$

Освен това веднага се проверява, че ако са в сила тези четири равенства, то и другите две формули от  $K$  се оказват верни в  $S$ . Основната лема за осъществимост позволява да твърдим, че съществува Ербранова структура  $S$ , за която са в сила горните равенства. Следователно множеството  $K$  е изпълнимо, а значи  $M$  също е изпълнимо. Вижда се и един модел на това множество - Ербрановата структура с елементи  $b_1$  и  $b_2$ , в която са неверни формулите  $s(b_1,b_1)$  и  $s(b_2,b_2)$  и са верни формулите  $s(b_2,b_1)$  и  $s(b_1,b_2)$ . Това показва и един (макар и неочакван) начин, по който изискването на задачата би могло да се осъществи на практика. А именно, достатъчно е даденото множество от мъже да се състои само от двамата бръснари и всеки от тях да бръсне другия, а да не бръсне себе си.

**Пример 3.** В теорията на частично наредените множества е известно едно просто разсъждение, дадено от [Алфред Тарски](#) (Alfred Tarski), което показва, че ако  $f$  е монотонно растящо изображение на дадено частично наредено множество  $C$  в себе си и даден елемент  $a$  на  $C$  е най-малко решение на неравенството  $x \geq f(x)$ , то е в сила равенството  $a = f(a)$  (пропускаме точните дефиниции на използваните понятия). Разсъждението е следното: от неравенството  $a \geq f(a)$  и монотонността на  $f$  се получава неравенството  $f(a) \geq f(f(a))$ , което показва, че  $f(a)$  е решение на неравенството  $x \geq f(x)$ ; отгук и от минималността на  $a$  следва неравенството  $f(a) \geq a$ , а то заедно с наличното неравенство в обратната посока показва, че наистина  $a = f(a)$ . Ще видим как този резултат (за простота без най-последната стъпка - преминаването от двете противоположни неравенства към равенство) би могъл да бъде получен по метода на Ербран. Ще използваме език на предикатното смятане с един нулместен функционален символ  $a$ , един едноместен функционален символ  $f$  и един двуместен предикатен символ  $\geq$ , като ще пишем  $\tau \geq \tau'$  вместо  $\geq(\tau, \tau')$ . Целта ни ще бъде да покажем, че винаги, когато в една структура са верни формулите  $\forall x \forall y (x \geq y \rightarrow f(x) \geq f(y))$  и  $\forall x (x \geq f(x) \rightarrow x \geq a)$ , където  $x$  и  $y$  са различни променливи, и е вярна формулата  $a \geq f(a)$ , в тази структура е вярна и формулата  $f(a) \geq a$ . Това ще постигнем, като покажем, че не е изпълнимо множеството  $M$  от формулите

$$\forall x \forall y (x \geq y \rightarrow f(x) \geq f(y)), \quad \forall x (x \geq f(x) \rightarrow x \geq a), \quad a \geq f(a), \quad \neg(f(a) \geq a).$$

Тъй като формулите от  $M$  са универсални, задачата се свежда до това, да докажем, че е неизпълнимо множеството  $K$  на всички техни конкретизации. За разлика от предходните примери, тук въпросните конкретизации са безбройно много, защото има безбройно много затворени термове:  $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$  По тази причина ние не можем да изброим всички конкретизации една по една и за някои от тях ще посочим само общия им вид. А именно, отбелязваме, че конкретизациите на формулите от  $M$  са формулите от вида  $\tau \geq \tau' \rightarrow f(\tau) \geq f(\tau')$ , където  $\tau$  и  $\tau'$  са затворени термове, формулите от вида  $\tau \geq f(\tau) \rightarrow \tau \geq a$ , където  $\tau$  е затворен терм, формулата  $a \geq f(a)$  и формулата  $\neg(f(a) \geq a)$ . Да предположим, че дадена структура  $S$  е модел на множеството  $K$ . Тогава формулата  $a \geq f(a)$  трябва да бъде вярна в  $S$ , а формулата  $f(a) \geq a$  трябва да бъде невярна в  $S$ . Лесно можем да намерим сред формулите от  $K$  една импликация, на която заключението е  $f(a) \geq a$ . А именно, ако във формулата  $\tau \geq f(\tau) \rightarrow \tau \geq a$  вземем в качеството на  $\tau$  терма  $f(a)$ , получаваме импликацията  $f(a) \geq f(f(a)) \rightarrow f(a) \geq a$ , която значи е формула от  $K$  и следователно трябва да бъде вярна в  $S$ . Това, заедно с неверността на формулата  $f(a) \geq a$  в  $S$ , показва, че и формулата  $f(a) \geq f(f(a))$  трябва да бъде невярна в  $S$ . Сега пък

ще потърсим сред формулите от  $K$  една импликация със заключение  $f(a) \geq f(f(a))$ . Такава е импликацията от вида  $\tau \geq \tau' \rightarrow f(\tau) \geq f(\tau')$ , ако в качеството на  $\tau$  и  $\tau'$  вземем съответно термовете  $a$  и  $f(a)$ . Понеже тази импликация трябва да е вярна в  $S$ , а заключението ѝ - да не е вярно в  $S$ , получаваме, че предпоставката ѝ  $a \geq f(a)$  трябва да не е вярна в  $S$ , и по този начин стигаме до противоречие. Следователно множеството  $K$  не притежава модел. И така,  $K$  не е изпълнимо, а значи и  $M$  не е изпълнимо.

**Пример 3'.** В пример 3 ние за простота избягнахме най-последната стъпка от разсъждението на Тарски, в която от две неравенства в противоположни посоки се получава равенство. Не би било сложно и тя да се вземе пред вид. За да направим това, би трябвало използваният език на предикатното смятане да има още един двуместен предикатен символ  $=$ , и, пишейки  $\tau = \tau'$  вместо  $=(\tau, \tau')$ , към множеството  $M$  да добавим още формулата  $\forall x(x \geq y \& y \geq x \rightarrow x = y)$ , а формулата  $\neg(f(a) \geq a)$  да заменим с формулата  $\neg(a = f(a))$ . Това ще доведе до добавяне към множеството  $K$  на всички формули от вида  $\tau \geq \tau' \& \tau' \geq \tau \rightarrow \tau = \tau'$ , където  $\tau$  и  $\tau'$  са затворени термове, и до същата замяна както в  $M$ . Отново допусваме, че дадена структура  $S$  е модел на  $K$ . Тогава формулата  $a = f(a)$  трябва да е невярна в  $S$  и затова (с оглед да достигнем до противоречие) е добре да потърсим сред формулите от  $K$  някоя импликация със заключение  $a = f(a)$ . Такава е импликацията  $\tau \geq \tau' \& \tau' \geq \tau \rightarrow \tau = \tau'$ , ако в качеството на  $\tau$  и  $\tau'$  вземем съответно термовете  $a$  и  $f(a)$ . Оттук виждаме, че и нейната предпоставка  $a \geq f(a) \& f(a) \geq a$  трябва да е невярна в  $S$ . Тъй като обаче първият член  $a \geq f(a)$  на тази предпоставка е формула от  $K$ , той трябва да е верен в  $S$ , следователно в  $S$  трябва да бъде неверен вторият член  $f(a) \geq a$  на предпоставката. Оттук нататък разсъжденията могат да продължат по същия начин както в пример 3.

**Забележка 3.** Теоремата, която илюстрирахме чрез горните примери, съдържа едно предположение, което в някои други случаи може да изглежда ограничително. Това е предположението, че има поне един нулместен функционален символ. В действителност обаче то не е ограничително, защото, от една страна, **както знаем**, винаги можем да разширим една дадена лексика с произволен краен брой (а даже и с изброимо много) нови функционални или предикатни символи с желан от нас брой аргументи, а от друга страна, както лесно се вижда, ако извършим такова разширяване на лексиката, то за произволно множество от формули, отговарящи на първоначалната лексика, изпълнимостта на това множество в случай, че си служим с разширената лексика, е равностойна с неговата изпълнимост при използване на първоначалната лексика.

**Пример 4.** Да предположим, че множеството на функционалните символи се състои само от един елемент - един едноместен функционален символ  $f$ . Ще искаме да изследваме, дали е изпълнимо множеството  $M$  от двете универсални формули

$$\forall x p(x, f(x)), \quad \forall x \neg p(f(x), x),$$

където  $x$  е променлива, а  $p$  е двуместен предикатен символ. За да можем да приложим метода на Ербран, разширяваме лексиката чрез добавяне на един нулместен функционален символ  $a$ . След това разширяване затворените термове ще бъдат същите както в пример 3, а множеството  $K$  на всички конкретизации на формулите от  $M$  ще се състои от всички формули от вида  $p(\tau, f(\tau))$  и всички формули от вида  $\neg p(f(\tau), \tau)$ , където  $\tau$  е затворен терм. За да бъде една структура модел на множеството  $K$ , необходимо и достатъчно е в нея да бъдат верни всички формули от вида  $p(\tau, f(\tau))$ , където  $\tau$  е затворен терм, и да бъдат неверни всички формули от вида  $\neg p(f(\tau), \tau)$ , където  $\tau$  е затворен терм. По следствието от основната лема за осъществимост съществуването на такава структура е равностойно с изискването никоя формула от първия от тези два вида да не е същевременно и формула от втория от тях. Това изискване е изпълнено, защото, ако допуснем, че за някои два затворени терма  $\tau$  и  $\tau'$  имаме равенството  $p(\tau, f(\tau)) = p(f(\tau'), \tau')$ , то бихме получили равенствата  $\tau = f(\tau')$  и  $f(\tau) = \tau'$ , а те не могат да бъдат едновременно верни - от първото се получава, че дължината на думата  $\tau$  е по-голяма от дължината на думата  $\tau'$ , а от второто - че е по-малка. И така, множеството  $K$  се оказва изпълнимо, следователно и множеството  $M$  е изпълнимо.

**Забележка 4.** Начинът, по който разгледахме пример 4, води до безкраен модел на множеството  $M$  от този пример, а именно до Ербранова структура с носител  $\{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$ . Директно може да се провери, че множеството  $M$  притежава и модел, на който носителът се състои само от три елемента. Такъв модел е всяка структура  $(\{c, d, e\}, I)$ , където  $c, d, e$  са различни обекти и имаме равенствата

$$I(f)(c) = d, I(f)(d) = e, I(f)(e) = c, \\ I(p)(c, d) = I(p)(d, e) = I(p)(e, c) = 1, I(p)(d, c) = I(p)(e, d) = I(p)(c, e) = 0.$$

Добре е да отбележим, че не всяко изпълнимо крайно множество от затворени универсални формули има модел с краен носител (вж. следващия пример), но са известни някои достатъчни условия, при които такъв модел съществува.<sup>1</sup>

**Пример 5.** При същото предположение за множеството на функционалните символи както в пример 4 да разгледаме множеството  $M$ , състоящо се от трите формули

$$\forall x \neg p(x, x), \quad \forall x p(x, f(x)), \quad \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(x, f(y))),$$

където  $x$  и  $y$  са две различни променливи, а  $p$  е пак двуместен предикатен символ. Това множество е изпълнимо, защото един негов модел е например онази структура с носител множеството на естествените числа, в която интерпретацията на  $f$  е прибавяне на 1, а на  $p$  - предикатът, приемащ стойност 1 точно тогава, когато стойността на първия аргумент е по-малка от стойността на втория. Лесно е да се види обаче невъзможността  $M$  да притежава модел с краен носител (за целта може да се използва, че във всеки модел на  $M$  при произволна оценка на променливите стойностите на термовете  $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))$  и т.н. са две по две различни помежду си).

**Забележка 5.** От доказаното необходимо и достатъчно условие може да се заключи (и примерите 1 и 2 го илюстрират), че ако всички функционални символи са нулместни, то съществува алгоритъм, който за всяко крайно множество от затворени универсални формули позволява да установим дали това множество е изпълнимо или не (тук и в другите случаи, когато става дума за прилагане на алгоритъм към крайно множество от формули или от друг вид думи, подразбираме, че е налице списък на елементите на това множество). И наистина, да предположим, че всички функционални символи са нулместни и е дадено едно крайно множество  $M$  от затворени универсални формули. Без ограничение на общността можем да приемем, че съществува поне

един нулместен функционален символ и благодарение на това споменатото необходимо и достатъчно условие е приложимо към  $M$ . Също без ограничение на общността можем да считаме, че функционалните символи са краен брой (дори да разполагаме с безбройно много такива символи, за построяването на коя да е конкретна формула от  $M$  са използвани най-много краен брой от тях, които разбира се могат да се извлекат от нея по прост начин). От друга страна, лесно се съобразява, че при такова положение (благодарение на наличието само на нулместни функционални символи) всяка затворена универсална формула има само краен брой конкретизации и те могат да бъдат получени от формулата с помощта на прост алгоритъм. Тогава краен брой ще бъдат и конкретизациите на всички формули от  $M$ , като ще имаме прост алгоритъм и за тяхното получаване. Конкретизациите обаче са безкванторни формули, а, както отбелязахме във въпроса за безкванторни формули, въпросът за изпълнимост на крайно множество от безкванторни формули е алгоритмично разрешим.

---

## Бележка

<sup>1</sup> По-специално наличието на такъв модел за множеството от пример 4 е частен случай от една теорема, доказана от [Антон Зиновиев](#) в статията му "Termal equations and finite controllability", Год. на Соф. унив., ФМИ, **93**, 1999, 49-54.

---

Последно изменение: 10.01.2001 г.

<a href="#">Previous</a>	<a href="#">Next</a>	<a href="#">Contents</a>
--------------------------	----------------------	--------------------------