ТЕОРЕМА НА ЕРБРАН

Ще докажем следното важно твърдение:

Теорема на Ербран. Ако съществува поне един нулместен функционален символ, то едно множество от затворени универсални формули е неизпълнимо точно тогава, когато е неизпълнимо някое крайно множество от техни конкретизации.

Доказателство. Нека съществува поне един нулместен функционален символ и нека *M* е дадено множество от затворени универсални формули. Вече знаем, че за да бъде *M* изпълнимо, необходимо и достатъчно е да бъде изпълнимо множеството *K* на всички конкретизации на формулите от *M*. Следователно *M* е неизпълнимо точно тогава, когато е неизпълнимо *K*. Разбира се, ако някое подмножество на *K* е неизпълнимо, толкова повече цялото К ще бъде неизпълнимо, тъй че при неизпълнимост на някое крайно множество от конкретизации на формули от *M* можем да бъдем сигурни, че *M* е неизпълнимо. Остава да докажем обратното - че при неизпълнимост на *M* някое крайно множество от конкретизации на формули от *M* е неизпълнимо. За да докажем това твърдение, да предположим, че *M* е неизпълнимо. Тогава и множеството *K* ще бъде неизпълнимо, а тъй като то се състои от безкванторни формули, теоремата за компактност за безкванторни формули дава, че *K* не е локално изпълнимо, т.е. някое крайно подмножество на *K* е неизпълнимо.

Пример 1. В пример 3 от предходния въпрос видяхме, че е неизпълнимо множеството от четирите универсални формули

$$\forall x\forall y(x\geq y\rightarrow f(x)\geq f(y)),\ \ \forall x(x\geq f(x)\rightarrow x\geq a),\ \ a\geq f(a),\ \ \neg(f(a)\geq a),$$

където x и y са различни променливи, a и f са съответно нулместен и двуместен функционален символ, ≥ е двуместен предикатен символ и вместо $\geq(\tau,\tau')$ пишем $\tau\geq\tau'$. Понеже в условията на споменатия пример могат да се образуват безбройно много затворени термове, множеството на конкретизациите на тези формули е безкрайно. Теоремата на Ербран гарантира, че някое крайно подмножество на това множество е неизпълнимо. Като се проследи направеното в споменатия пример, може да се забележи, че е едно такова подмножество е онова, което се състои от формулите

$$a\geq f(a)\rightarrow f(a)\geq f(f(a)),\ \ f(a)\geq f(f(a))\rightarrow f(a)\geq a,\ \ a\geq f(a),\ \ \neg(f(a)\geq a).$$

В този пример намереното неизпълнимо крайно множество от конкретизации съдържа по една конкретизация на всяка една от дадените универсални формули. В следващия пример положението ще бъде друго.

Пример 2. Нека *M* е множеството, съставено от петте универсални формули

$$p(a),\ \ \forall x(p(x)\rightarrow p(f^2(x))),$$
$$q(a),\ \ \forall x(q(x)\rightarrow q(f^3(x))),$$
$$\forall x\neg(p(f(x))\&q(f(x))),$$

където a и f са съответно нулместен и едноместен функционален символ, p и q са едноместни предикатни символи, x разбира се е променлива, а $f^n(\tau)$ е съкращение за думата f(f(...f(τ)...)), в която частите преди и след τ представляват съответно *n*-кратно повторение на думата f(и на дясна скоба. Тогава едно неизпълнимо крайно множество от конкретизации на тези формули е например онова, което се състои от осемте формули

$$p(a),\ \ p(a)\rightarrow p(f^2(a)),\ \ p(f^2(a))\rightarrow p(f^4(a)),\ \ p(f^4(a))\rightarrow p(f^6(a)),$$
$$q(a),\ \ q(a)\rightarrow q(f^3(a)),\ \ q(f^3(a))\rightarrow q(f^6(a)),$$
$$\neg(p(f^6(a))\&q(f^6(a))).$$

Това множество съдържа три конкретизации на втората формула от *M*, две конкретизации на четвъртата и по една конкретизация на всяка от останалите три (първата и третата формула от *M* разбира се имат изобщо по една единствена конкретизация). Може да се покаже, че всяко неизпълнимо множество от конкретизации на формули от *M* е длъжно да съдържа поне първите седем от горните осем формули и някоя конкретизация на последната формула от *M*.

При доказателството на теоремата на Ербран ние си послужихме с теоремата за компактност за безкванторни формули. Като използваме теоремата на Ербран, ще получим един друг случай на общата теорема за компактност в предикатното смятане.

Теорема за компактност за затворени универсални формули. Всяко локално изпълнимо множество от затворени универсални формули е изпълнимо.

Доказателство. Нека *M* е локално изпълнимо множество от затворени универсални формули. Да допуснем, че *M* не е изпълнимо. Без ограничение на общността можем да приемем, че съществува поне един нулместен функционален символ. В такъв случай обаче теоремата на Ербран позволява да твърдим, че някое крайно множество от конкретизации на формули от *M* е неизпълнимо. Избирайки за всяка формула θ от това крайно множество някоя формула от *M*, на която θ е конкретизация, получаваме неизпълнимо крайно подмножество на *M*, а това противоречи на локалната изшълнимост на *M*.

В предходния въпрос видяхме, че при определени (твърде силни) ограничения съществува алгоритъм, чрез който за всяко крайно множество от затворени универсални формули можем да познаем дали е изпълнимо или не. В общия случай (когато не се поставят споменатите ограничения) такъв алгоритъм няма (доказано е, че не е възможен!). С помощта на теоремата на Ербран все пак се вижда, че в общия случай съществува алгоритъм, който за всяко неизпълнимо крайно множество от затворени универсални формули установява чрез краен брой действия неговата неизпълнимост, а за изпълнимо крайно множество установява неговата изпълнимост само в случай че при прилагане към множеството той завършва своята работа.Сега ще опишем (в общи линии) един такъв алгоритъм.

Както преди, и сега без ограничение на общността можем да считаме, че съществува поне един нулместен функционален символ. При това положение едно множество M от затворени универсални формули е неизпълнимо точно тогава, когато е неизпълнимо някое крайно множество от конкретизации на формули от M. Ние ще се ограничим със случая, когато M не е празно, тъй като празното множество е изпълнимо по тривиални причини. Нека освен това M е крайно. Тогава можем да приемем още, че функционалните символи са краен брой, а именно - функционалните символи, използвани при построяването на формулите от M, и евентуално някакъв допълнително добавен нулместен функционален символ (нужда от такова добавяне възниква тогава, когато при построяването на формулите от M не е използван никакъв нулместен функционален символ). В такъв случай всевъзможните затворени термове, които могат да се образуват, ще могат алгоритмично да бъдат подредени в редица - крайна или безкрайна. Същото ще важи и за всевъзможните конкретизации на формулите от M - и конкретизациите ще могат алгоритмично да бъдат подредени в една крайна или безкрайна редица θ_0, θ_1, θ_2, θ_3... Да положим сега

$$K_0=\{\theta_0\},\ K_1=\{\theta_0,\theta_1\},\ K_2=\{\theta_0,\theta_1,\theta_2\},\ K_3=\{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3\},\ \ldots$$

Редицата K_0, K_1, K_2, K_3, ... може да бъде крайна или безкрайна. Тя е крайна точно тогава, когато е крайна редицата θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, ... - разбира се тогава конкретизациите на формулите от M образуват крайно множество и последният член на редицата K_0, K_1, K_2, K_3, ... представлява въпросното крайно множество. Тъй като всяко крайно множество от конкретизации на формули от M се съдържа в някое от крайните множества K_0, K_1, K_2, K_3, ..., ясно е, че M ще бъде неизпълнимо точно тогава, когато е неизпълнимо някое от тях. Поради това бихме могли да си послужим със следния алгоритъм, където допустими стойности на n са неотрицателните цели числа:

0. Полагаме n=0.

1. Проверяваме дали множеството K_n е изпълнимо. Ако е изпълнимо, преминаваме към инструкция 2, а ако не е, прекратяваме работата и обявяваме, че M е неизпълнимо.

2. Ако K_n е последен член на редицата K_0, K_1, K_2, K_3, ..., прекратяваме работата и обявяваме, че M е изпълнимо. В противен случай увеличаваме n с 1 и преминаваме отново към инструкция 1.

Гореописаният алгоритъм може да бъде уточнен по разни начини, защото за едно и също множество M редицата θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, ... би могла да бъде избрана по различен начин. За съжаление, което и от уточненията да вземем, редки биха били случаите, в които алгоритъмът да се оказва практически удобен. Затова по-нататък ще се занимаем и с някои други алгоритми за решаване на задачи от разглеждания вид.

Забележка. С малки изменения направените преди малко разглеждания са възможни и в случая на такова множество M от затворени универсални формули, което не е непременно крайно, но елементите му могат да бъдат алгоритмично подредени в редица (в този случай не е сигурно, че функционалните символи са краен брой, но можем да считаме, че те също допускат алгоритмично подреждане в редица).

От теоремата на Ербран може да се направи и още един извод с, тъй да се каже, мирогледно значение. Той е следният: ако M е неизпълнимо множество от затворени универсални формули, което е алгоритмично подредено в редица (крайна или безкрайна), неизпълнимостта на M може да бъде доказана по един твърде елементарен начин - чрез установяване на неизпълнимостта на подходящо крайно множество от безкванторни формули, които са конкретизации на формули от M (това, че M е алгоритмично подредено в редица, има значение, защото осигурява общ начин за установяване на принадлежност към M).

Последно изменение: 26.07.1999 г.