

Задачи към "Разширение и сечение на секвенции"

1. Намерете ес-противоречиво крайно подмножество на множеството M от пример 1 от основния текст, както и неизпълнимо крайно подмножество на множеството на конкретизациите на петте формули от същия пример.
2. Нека n е дадено естествено число, $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ са крайни множества от формули, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са формули. За секвенцията $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n :- \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ покажете, че може да се получи чрез n прилагания на сечение
 - а) от секвенцията $\Gamma_0 \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} :- \Delta_0$ и секвенциите $\Gamma_i :- \Delta_i \cup \{\varphi_i\}, i=1, \dots, n$;
 - б) от секвенцията $\Gamma_0 :- \Delta_0 \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ и секвенциите $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} :- \Delta_i, i=1, \dots, n$.
3. Нека две секвенции $\Gamma' :- \Delta'$ и $\Gamma'' :- \Delta''$ имат съществено сечение. Покажете, че същественото им сечение може да се напише във вида $(\Gamma \wedge \Delta'') \cup \Gamma'' :- \Delta' \cup (\Delta \wedge \Gamma')$.
4. Докажете изказаното в основния текст твърдение, че ако една секвенция, която е сечение на две дадени секвенции, не е тривиално тждествено вярна и не е разширение на никоя от двете, то тя е тяхно съществено сечение.
5. Нека секвенцията $\Gamma :- \Delta$ е сечение на две секвенции, някоя от които е тривиално тждествено вярна. Докажете, че $\Gamma :- \Delta$ е разширение на другата от двете секвенции или е тривиално тждествено вярна (следователно $\Gamma :- \Delta$ не е съществено сечение на тези две секвенции).
6. Докажете, че ако една секвенция е сечение на две тривиално тждествено верни секвенции, тя също е тривиално тждествено вярна.
7. Нека M е някое множество от секвенции. Докажете, че всяка секвенция, с-изводима от M , е разширение на някоя секвенция, ес-изводима от M , или е тривиално тждествено вярна. Използвайте това, за да докажете, че всяко с-противоречиво множество от секвенции е ес-противоречиво (следователно свойствата с-противоречивост и ес-противоречивост на едно множество от секвенции са равносилни).
8. Нека M е множество от секвенции, а Γ° и Δ° са крайни множества от формули. Докажете, че при произволен избор на секвенцията $\Gamma :- \Delta$, с-изводима от множеството $M \cup \{\Gamma^\circ :- \Delta^\circ\}$, всяка секвенция, имаща вида $\Gamma :- \Delta \cup \{\chi\}$, където $\chi \in \Gamma^\circ$, или вида $\Gamma \cup \{\chi\} :- \Delta$, където $\chi \in \Delta^\circ$, е разширение на някоя секвенция, с-изводима от M , или е тривиално тждествено вярна.
9. Нека M е множество от секвенции, което не е с-противоречиво, а Γ° и Δ° са такива крайни множества от формули, че множеството $M \cup \{\Gamma^\circ :- \Delta^\circ\}$ е с-противоречиво. Докажете, че всички секвенции от вида $:-\chi$, където $\chi \in \Gamma^\circ$, и всички секвенции от вида $\chi :-$, където $\chi \in \Delta^\circ$, са ес-изводими от M .
10. Нека M е множество от секвенции, а Γ° и Δ° са такива крайни множества от формули, че всички секвенции от вида $:-\chi$, където $\chi \in \Gamma^\circ$, и всички секвенции от вида $\chi :-$, където $\chi \in \Delta^\circ$, са с-изводими от M . Докажете, че множеството $M \cup \{\Gamma^\circ :- \Delta^\circ\}$ е с-противоречиво.
11. Нека M е такова множество от секвенции, че всички секвенции от M са с непразни заключения или всички секвенции от M са с непразни предпоставки. Докажете, че M не е с-противоречиво.
12. Като използвате пример 1 от основния текст (вкл. означението M от този пример) и задачи 9 и 11, покажете, че:
 - а) секвенцията (9) от споменатия пример е ес-изводима от множеството $M \setminus \{a \geq f(a) :-\}$;
 - б) от множеството $M \setminus \{:-a \geq f(f(a))\}$ е ес-изводима секвенцията $a \geq f(f(a)) :-$.Установете същите твърдения и директно.