ПРЕДСТАВЯНЕ НА ФОРМУЛИ В ПРЕНЕКСЕН ВИД

По естествен начин се дефинира индуктивно какво значи една формула да *има даден брой квантори*, при което броят е винаги неотрицателно цяло число. А именно:

БК0. Ако α е атомарна формула, то α има 0 квантори.
БК1. Ако φ има n квантора, то $\neg\varphi$ също има n квантора.
БК2,3. Ако φ има k квантора, а ψ има l квантора, то всяка от формулите $\varphi\&\psi$ и $\varphi\vee\psi$ има $k+l$ квантора.
БК4,5. Ако φ има n квантора и ξ е променлива, то всяка от формулите $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ има $n+1$ квантора.

Чрез индукция, съобразена с дефиницията за формула, веднага се получава, че за всяка формула φ съществува точно едно неотрицателно цяло число n, такова, че φ има n квантора (при доказателството за единственост се използва и еднозначността на синтактичния анализ на формулите). Разбира се, за въпросното n ще казваме, че е *броят на кванторите на* φ. Пак чрез индукция, съобразена с дефиницията за формула, се показва още, че една формула е безкванторна точно тогава, когато броят на кванторите ѝ е 0, и че винаги, когато σ е преименуваща субституция, за всяка формула φ съответната ѝ формула $\sigma^{\#}(\varphi)$ има същия брой квантори както φ.

За една формула ще казваме, че е *в пренексен вид*, ако тя има вида $K_1K_2...K_n\theta$, където θ е безкванторна формула, n е неотрицателно цяло число и всяка от думите $K_1, K_2, ..., K_n$ е квантор за общност или квантор за съществуване относно някоя променлива. Ясно е, че универсалните формули (в частност безкванторните формули) са формули в пренексен вид, но освен тях има и много други в такъв вид.

Забележка 1. Ако в горната дефиниция поискаме допълнително кванторите $K_1, K_2, ..., K_n$ да са относно две по две различни променливи, ние бихме стеснили обема на понятието формула в пренексен вид, но това ограничение не би било съществено, защото всяка формула в пренексен вид в първоначалния смисъл би била еквивалентна на формула в пренексен вид в новия смисъл (получена като в случай на квантори относно една и съща променлива се остави само най-десният от тях).

Следващата теорема ще играе важна роля в по-нататъшната ни работа.

Теорема за представимост в пренексен вид. Всяка формула е еквивалентна на някоя формула в пренексен вид, имаща същите свободни променливи както дадената.

Доказателство. Ще използваме следните еквивалентности, където φ и θ са произволни формули, ξ е променлива, K е квантор за общност или квантор за съществуване относно някоя променлива, която не е свободна променлива на θ, а λ е кой да е от знаците "&" и "$\vee$":

(1) $\neg\forall\xi\varphi \Leftrightarrow \exists\xi\neg\varphi,\ \ \neg\exists\xi\varphi \Leftrightarrow \forall\xi\neg\varphi,$

(2) $(K\varphi\lambda\theta) \Leftrightarrow K(\varphi\lambda\theta),\ \ (\theta\lambda K\varphi) \Leftrightarrow K(\theta\lambda\varphi).$

Верността на еквивалентностите (1) беше отбелязана във въпроса "Следване на една формула от друга. Еквивалентни формули". Тъй като втората от еквивалентностите (2) следва съвсем лесно от първата, ще се ограничим с доказателство на първата. Възможни са четири случая според вида на квантора K и на знака λ. Ще разгледаме подробно единия от тях - онзи, в който K е квантор за общност, а λ е знакът "$\vee$" (другите три се разглеждат аналогично или по-лесно). Нека K е $\forall\xi$, където ξ е дадена променлива, която разбира се не е свободна променлива на θ. Тогава доказваната еквивалентност добива вида

$$\forall\xi\varphi\vee\theta \Leftrightarrow \forall\xi(\varphi\vee\theta).$$

Нека $S=(C,I)$ е произволна структура, а v е произволна оценка в S на променливите. Целта ни ще бъде да докажем, че формулата $\forall\xi\varphi\vee\theta$ е вярна в конфигурацията (S,v) точно тогава, когато в тази конфигурация е вярна формулата $\forall\xi(\varphi\vee\theta)$. Да предположим най-напред, че $\forall\xi\varphi\vee\theta$ е вярна в конфигурацията (S,v). В такъв случай някоя от формулите $\forall\xi\varphi$ и θ е вярна в (S,v). С цел да докажем, че и формулата $\forall\xi(\varphi\vee\theta)$ е вярна в (S,v), да означим с v' ξ,c-модификацията на v, където c е произволен елемент на C. Споменатата цел ще бъде постигната, ако успеем да покажем, че някоя от формулите φ и θ е вярна в конфигурацията (S,v'), защото тогава и дизюнкцията им ще бъде вярна в тази конфигурация. А положението е наистина такова - ако $\forall\xi\varphi$ е вярна в (S,v), то φ ще бъде вярна в (S,v') по семантиката на квантора за общност, а ако θ е вярна в (S,v), то θ ще бъде вярна и в (S,v'), защото оценките v и v' съвпадат върху свободните променливи на θ. Сега да предположим пък, че формулата $\forall\xi(\varphi\vee\theta)$ е вярна в (S,v), и да допуснем, че формулата $\forall\xi\varphi\vee\theta$ не е вярна в (S,v). Тогава никоя от двете формули $\forall\xi\varphi$ и θ не е вярна в (S,v). Да означим отново с v' ξ,c-модификацията на v, където c е произволен елемент на C. Поради верността на $\forall\xi(\varphi\vee\theta)$ в (S,v), дизюнкцията $\varphi\vee\theta$ ще бъде вярна в (S,v'), а поради съвпадането на v и v' върху свободните променливи на θ формулата θ няма да е вярна в (S,v'). Оттук заключаваме, че формулата φ е вярна в (S,v'). Тъй като това заключение е в сила при всеки избор на елемента c на C, можем да твърдим, че формулата $\forall\xi\varphi$ е вярна в конфигурацията (S,v), а нашето допускане ни беше довело до противоположното твърдение. Полученото противоречие показва, че допускането е било погрешно и значи формулата $\forall\xi\varphi\vee\theta$ е вярна в (S,v).

Лесно се проверява, че във всяка от еквивалентностите (1) и (2) при направените преди тях предположения двете страни на еквивалентността имат едни и същи свободни променливи.

Да наречем временно една формула φ *редуцируема*, ако тя е еквивалентна на някоя формула със същите свободни променливи, но имаща вида $K\chi$, където K е квантор относно някоя променлива, а χ е формула с брой на кванторите, по-малък от този на φ. Ще покажем, че всяка формула с положителен брой на кванторите е редуцируема. За целта е достатъчно да докажем помощното твърдение, че всяка формула е безкванторна или е редуцируема, а това ще направим чрез индукция, съобразена с дефиницията за формула. За краткост да наречем (пак временно) една формула *нормална*, ако тя е безкванторна или е редуцируема. Атомарните формули са нормални, защото са безкванторни. Формулите от вида $\forall\xi\varphi$ и от вида $\exists\xi\varphi$, където ξ е променлива, а φ е произволна формула, също са нормални, защото са очевидно редуцируеми. Поради това за провеждането на индукцията остава да се убедим, че нормалността се запазва при образуване на отрицание, на конюнкция и на дизюнкция.

За случая на отрицание да предположим, че φ е дадена нормална формула. Ще трябва да покажем, че и формулата $\neg\varphi$ е нормална. Ако φ е безкванторна, то $\neg\varphi$ е също безкванторна и значи е нормална. Да разгледаме случая, когато φ е редуцируема. Тогава $\varphi \models\!\!\!\!\dashv K\chi$, където K е квантор относно някоя променлива, χ е някоя формула, имаща по-малък брой квантори от φ, и формулата $K\chi$ има същите свободни променливи както φ. Тогава, използвайки подходяща измежду еквивалентностите (1), получаваме, че

$$\neg\varphi \models\!\!\!\!\dashv \neg K\chi \models\!\!\!\!\dashv K^{\sim}\neg\chi,$$

където $K^{\sim}$ е другият вид квантор относно същата променлива както K, като при това са верни равенствата

$$CBO(K^{\sim}\neg\chi)=CBO(\neg K\chi)=CBO(K\chi)=CBO(\varphi)=CBO(\neg\varphi).$$

Като вземем пред вид още, че броят на кванторите се запазва при образуване на отрицание, виждаме също, че броят на кванторите на $\neg\chi$ е по-малък от броя на кванторите на $\neg\varphi$. С това е показано, че и формулата $\neg\varphi$ е редуцируема, а значи и нормална.

За случаите на конюнкция и на дизюнкция да предположим, че φ и ψ са нормални формули, а λ е някой от знаците "&" и "$\vee$". Ще покажем, че формулата $\varphi\lambda\psi$ също е нормална. Ако и двете формули φ и ψ са безкванторни, това е ясно, защото тогава и $\varphi\lambda\psi$ ще бъде безкванторна. Затова да разгледаме случая, когато някоя от тях е редуцируема. Нека например φ е редуцируема. Тогава $\varphi \models\!\!\!\!\dashv K\chi$, където K е квантор относно някоя променлива, χ е някоя формула, имаща по-малък брой квантори от φ, и свободните променливи на $K\chi$ са същите както на φ. Ако променливата, относно която е кванторът K, не е свободна променлива на ψ, оттук, използвайки първата от еквивалентностите (2), получаваме, че

$$\varphi\lambda\psi \models\!\!\!\!\dashv K(\chi\lambda\psi),$$

като при това са налице равенствата

$$CBO(K(\chi\lambda\psi))=CBO(K\chi\lambda\varphi)=CBO(K\chi)\cup CBO(\psi)=CBO(\varphi)\cup CBO(\psi)=CBO(\varphi\lambda\psi).$$

Тъй като броят на кванторите на формулата $\chi\lambda\psi$ е по-малък от броя на кванторите на формулата $\varphi\lambda\psi$, с това е показано, че и $\varphi\lambda\psi$ сигурно е редуцируема, а значи и нормална в случая, когато променливата, относно която е кванторът K, не е свободна променлива на ψ. Случаят, когато въпросната свързана променлива е свободна променлива на ψ, може да бъде сведен към него с помощта на теоремата за преименуване на свързани променливи. Например, нека $K=\forall\xi$, където ξ е свободна променлива на ψ. Да изберем някоя променлива ξ', която не е свободна променлива нито на χ, нито на ψ (такава променлива ξ' съществува, защото свободните променливи на коя да е формула са крайно много, а множеството Ξ на всички променливи е безкрайно). Нека σ е преименуващата субституция $(\xi,\xi':=\xi',\xi)$. Тогава, по споменатата теорема, $K\chi \models\!\!\!\!\dashv \sigma^{\#}(K\chi)=\forall\xi'\sigma^{\#}(\chi)$ и формулата $\forall\xi'\sigma^{\#}(\chi)$ има същите свободни променливи както $K\chi$. Освен това $\sigma^{\#}(\chi)$ има същия брой квантори както χ. Следователно ще имаме разгледаното преди малко положение, ако в качеството на ново K вземем $\forall\xi'$, а в качеството на ново χ - формулата $\sigma^{\#}(\chi)$.

След като по този начин завършихме доказателството на помощното твърдение, можем да завършим и доказателството на теоремата за представяне в пренексен вид. Това можем да направим чрез индукция относно броя на кванторите в разглежданата формула. Да наречем една формула *пренексно представима*, ако тя е еквивалентна на някоя формула в пренексен вид, имаща същите свободни променливи. Формулите, чийто брой на кванторите е 0, са безкванторни и следователно те самите имат пренексен вид, поради което разбира се са пренексно представими. От друга страна, ако при дадено положително цяло число n всички формули с по-малко от n квантори са пренексно представими, то и формулите с брой n на кванторите ще бъдат пренексно представими благодарение на своята редуцируемост.

Забележка 2. Всъщност изложеното доказателство на теоремата за представи- мост в пренексен вид позволява да се твърди, че всяка формула е еквивалентна на някоя формула в пренексен вид, имаща същите свободни променливи както дадената и не по-голям брой квантори от нейния. Доказателството на теоремата дава и начин за намирането на такава еквивалентна формула, при която броят на кванторите е същият както при дадената формула. Ако вместо част от еквивалентностите от вида (2) се използват подходящи други еквивалентности, то за някои формули могат да се намерят еквивалентни на тях формули в пренексен вид със същите свободни променливи, но с по-малък брой квантори. Две еквивалентности, които често са подходящи в това отношение, са следните:

$$\forall\xi\varphi\&\forall\xi\psi \models\!\!\!\!\dashv \forall\xi(\varphi\&\psi), \quad \exists\xi\varphi\vee\exists\xi\psi \models\!\!\!\!\dashv \exists\xi(\varphi\vee\psi)$$

(в тях ξ може да бъде произволна променлива, а φ и ψ могат да бъдат произволни формули; доказателството на еквивалентностите не представлява затруднение). С помощта на тези еквивалентности могат да се преработват и формули от по-общите видове $\forall\xi\varphi\&\forall\eta\psi$ и $\exists\xi\varphi\vee\exists\eta\psi$, където ξ и η са произволни променливи, а φ и ψ - произволни формули; това може да се прави като при $\xi\neq\eta$ първо се извърши преименуване на едната или евентуално на двете свързани променливи.

Пример. Ще представим в пренексен вид формулата $\forall xp(x,y)\&\forall yq(x,y)$, където x и y са различни променливи, а p и q са двуместни предикатни символи. Можем да си послужим със следната верига от еквивалентности, където z е променлива, различна от x и от y:

$$\forall xp(x,y)\&\forall yq(x,y) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall zp(z,y)\&\forall zq(x,z) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall z(p(z,y)\&q(x,z)).$$

Ако бихме следвали метода, произтичащ от доказателството на теоремата, би трябвало да си послужим примерно с веригата от еквивалентности

$$\forall xp(x,y)\&\forall yq(x,y) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall zp(z,y)\&\forall yq(x,y) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall z(p(z,y)\&\forall yq(x,y)) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall z(p(z,y)\&\forall uq(x,u)) \mathrel{\models\!\!\dashv} \forall z\forall u(p(z,y)\&q(x,u)),$$

където z и u са две нови променливи; резултатът би съдържал един квантор повече от резултата, получен по другия начин.

Последно изменение: 26.07.1999 г.