

## ПРИЛАГАНЕ НА СУБСТИТУЦИИ КЪМ ПРОИЗВОЛНИ ФОРМУЛИ (семантични въпроси)

Преди известно време доказахме една теорема за стойността на резултата от прилагане на субституция към терм или безкванторна формула. Сега ще докажем подобна теорема за случая на прилагане на субституция към произволна формула.

**Теорема за стойността на резултата от прилагане на субституция към формула.** Нека  $\varphi$  е произволна формула. Тогава за всяка субституция  $\sigma$ , приложима към  $\varphi$ , и всяка конфигурация  $(S, v)$  е в сила равенството  $\sigma(\varphi)^{S, v} = \varphi^{\sigma(S, v)}$ .

**Доказателство.** Случаят, когато формулата  $\varphi$  е атомарна, се съдържа в споменатата вече доказана теорема. Сега ще покажем, че свойството, за което става дума в теоремата, се запазва при образуване на отрицание, на конюнкция и на дизюнкция, а също при поставяне на квантори. Нека  $\varphi$  е формула, притежаваща доказаното свойство. За да докажем, че и формулата  $\neg\varphi$  го притежава, разглеждаме произволна субституция  $\sigma$ , приложима към  $\neg\varphi$ , и произволна конфигурация  $(S, v)$  и правим следните пресмятания:

$$\sigma(\neg\varphi)^{S, v} = (\neg\sigma(\varphi))^{S, v} = 1 - \sigma(\varphi)^{S, v} = 1 - \varphi^{\sigma(S, v)} = (\neg\varphi)^{\sigma(S, v)}.$$

Аналогично, ако  $\varphi$  и  $\psi$  са формули, притежаващи доказаното свойство, то за да докажем, че тяхната конюнкция го притежава, разглеждаме произволна субституция  $\sigma$ , приложима към формулата  $\varphi \& \psi$ , и произволна конфигурация  $(S, v)$  и правим следните пресмятания:

$$\sigma(\varphi \& \psi)^{S, v} = (\sigma(\varphi) \& \sigma(\psi))^{S, v} = \min\{\sigma(\varphi)^{S, v}, \sigma(\psi)^{S, v}\} = \min\{\varphi^{\sigma(S, v)}, \psi^{\sigma(S, v)}\} = (\varphi \& \psi)^{\sigma(S, v)}.$$

По подобен начин се установява, че и дизюнкцията на две формули с разглежданото свойство също има това свойство.

Преминаваме към въпроса за запазването на свойството при поставяне на квантор. Ще се ограничим със случая на квантор за общност. Нека  $\varphi$  е формула, притежаваща въпросното свойство,  $\xi$  е променлива,  $\sigma$  е субституция, приложима към формулата  $\forall\xi\varphi$ , и  $(S, v)$  е дадена конфигурация. Имаме  $S = (C, I)$  за някое  $C$  и някое  $I$ , а още

$$\sigma(S, v) = (S, v'),$$

където оценката  $v'$  се дефинира с помощта на равенството

$$v'(\eta) = \sigma(\eta)^{S, v}.$$

Правим следните пресмятания:

$$\begin{aligned} \sigma(\forall\xi\varphi)^{S, v} &= (\forall\xi\sigma_\xi(\varphi))^{S, v} = \min\left\{\sigma_\xi(\varphi)^{S, v'_\xi} \mid c \in C\right\} = \min\left\{\varphi^{\sigma_\xi(S, v'_\xi)} \mid c \in C\right\}, \\ (\forall\xi\varphi)^{\sigma(S, v)} &= (\forall\xi\varphi)^{S, v'} = \min\left\{\varphi^{S, v'_\xi} \mid c \in C\right\}. \end{aligned}$$

Нашата цел да докажем, че  $\sigma(\forall\xi\varphi)^{S, v} = (\forall\xi\varphi)^{\sigma(S, v)}$ , сигурно ще бъде постигната, ако установим, че за всеки елемент  $c$  на множеството  $C$  е изпълнено равенството

$$\varphi^{\sigma_\xi(S, v'_\xi)} = \varphi^{S, v'_\xi}.$$

Нека  $c$  е произволен елемент на  $C$ . Имаме

$$\sigma_\xi(S, v'_\xi) = (S, w),$$

където оценката  $w$  се дефинира с помощта на равенството

$$w(\eta) = \sigma_\xi(\eta)^{S, v'_\xi}.$$

Значи достатъчно е да докажем равенството

$$\varphi^{S, w} = \varphi^{S, v'_\xi}.$$

Това ще направим, като покажем, че двете оценки  $w$  и  $v'_\xi$  съвпадат върху множеството на свободните променливи на формулата  $\varphi$ . Нека  $\eta$  е коя да е от тези променливи. Ако  $\eta$  е променливата  $\xi$ , то равенството

$$w(\eta) = v'_\xi(\eta)$$

е вярно, защото в този случай и двете му страни са равни на  $c$ . Нека сега  $\eta$  да е някоя друга измежду свободните променливи на  $\varphi$ . Тогава

$$w(\eta)=\sigma(\eta)^{S, v_{\xi}^c}, \quad v_{\xi}^c(\eta)=\sigma(\eta)^{S, v}$$

и значи е достатъчно да покажем, че оценките  $v_{\xi}^c$  и  $v$  съвпадат върху множеството на свободните променливи на терма  $\sigma(\eta)$ . Тези две оценки наистина съвпадат върху въпросното множество, защото те могат да имат различни стойности само за променливата  $\xi$ , а тя не е свободна променлива на  $\sigma(\eta)$  благодарение на това, че субституцията  $\sigma$  не привнася  $\xi$  във формулата  $\phi$ . С това доказателството на теоремата е завършено.

Доказаната теорема ще ни позволи да пренесем за произволни формули и други неща, които по-рано изказахме само за безкванторни формули.

**Лема за запазване на тждествената вярност при прилагане на субституция към произволна формула.** Ако  $\phi$  е формула, която е тждествено вярна в дадена структура  $S$ , а  $\sigma$  е субституция, приложима към  $\phi$ . Тогава формулата  $\sigma(\phi)$  също е тждествено вярна в  $S$ .

Доказателството на тази лема е напълно аналогично на доказателството на аналогичната лема, отнасяща се до прилагане на субституция към безкванторна формула.

Както и в по-рано разглеждания случай, всеки резултат от прилагане на субституция към дадена формула ще наричаме *частен случай* на тази формула. Току-що доказаната лема може да се изкаже така: всички частни случаи на формула, тждествено вярна в дадена структура, са също тждествено верни в тази структура. Оттук разбира се се вижда, че всички затворени частни случаи на формула, тждествено вярна в дадена структура, са верни в тази структура. Обратното в общия случай не е вярно, но за да е налице то, имаме същото достатъчно условие както по-рано.

**Достатъчно условие за тждествена вярност при вярност на затворените частни случаи.** Нека  $S=(C, I)$  е такава структура, че всеки елемент на  $C$  е стойност в  $S$  на някой затворен терм, нека  $\phi$  е формула и нека всички затворени частни случаи на  $\phi$  са верни в  $S$ . Тогава  $\phi$  е тждествено вярна в  $S$ .

Единственият допълнителен момент в доказателството на това твърдение в сравнение с аналогичното по-раншно доказателство е това, че трябва да се уверим в приложимостта на разглежданата в него субституция към формулите, към които искаме да я прилагаме. Това обаче е ясно от обстоятелството, че въпросната субституция преобразува всяка променлива в затворен терм, а такива субституции са приложими към всяка формула.

От лемата за запазване на тждествената вярност при прилагане на субституция към произволна формула лесно се получава следното твърдение.

**Лема за запазване на следването при прилагане на субституция.** Нека  $\phi$  и  $\psi$  са формули, за които е изпълнено съотношението  $\phi \models \psi$ , а  $\sigma$  е субституция, която е приложима както към  $\phi$ , така и към  $\psi$ . Тогава е в сила и съотношението  $\sigma(\phi) \models \sigma(\psi)$ .

**Доказателство.** При направените предположения може да се твърди, че импликацията  $\phi \rightarrow \psi$  е тждествено вярна. От друга страна приложимостта на  $\sigma$  към формулите  $\phi$  и  $\psi$  гарантира нейната приложимост и към споменатата импликация, а също равенството  $\sigma(\phi \rightarrow \psi) = \sigma(\phi) \rightarrow \sigma(\psi)$ . Това показва, че и импликацията  $\sigma(\phi) \rightarrow \sigma(\psi)$  е тждествено вярна.

**Следствие.** Ако  $\phi$  и  $\psi$  са еквивалентни формули, а  $\sigma$  е субституция, която е приложима както към  $\phi$ , така и към  $\psi$ , то формулите  $\sigma(\phi)$  и  $\sigma(\psi)$  също са еквивалентни.

С помощта на лемата за запазване на следването при прилагане на субституция ще докажем следната теорема.

**Теорема за семантичната връзка между генерализация, частен случай и екзистенциализация.** Нека  $\phi$  е формула,  $\xi_1, \dots, \xi_n$  са различни променливи, а  $\tau_1, \dots, \tau_n$  са такива термове, че субституцията  $(\xi_1, \dots, \xi_n := \tau_1, \dots, \tau_n)$  е приложима към  $\phi$ . Тогава са изпълнени съотношенията

$$\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \phi \models (\xi_1, \dots, \xi_n := \tau_1, \dots, \tau_n)(\phi) \models \exists \xi_1 \dots \exists \xi_n \phi.$$

**Доказателство.** Да означим със  $\sigma$  споменатата в теоремата субституция. Очевидно  $\sigma$  съвпада със субституцията  $(:=)$  върху множеството на свободните променливи на всяка от формулите  $\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \phi$  и  $\exists \xi_1 \dots \exists \xi_n \phi$ . Следователно  $\sigma$  е приложима към всяка от тези две формули и са изпълнени равенствата

$$\sigma(\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \phi) = \forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \phi, \quad \sigma(\exists \xi_1 \dots \exists \xi_n \phi) = \exists \xi_1 \dots \exists \xi_n \phi.$$

Поради това е достатъчно да докажем съотношенията

$$\forall \xi_1 \dots \forall \xi_n \phi \models \exists \xi_1 \dots \exists \xi_n \phi.$$

За да ги докажем, първо отбелязваме, че за всяка формула  $\theta$  и всяка променлива  $\xi$  са изпълнени съотношенията

$$\forall \xi \theta \Rightarrow \exists \xi \theta$$

(това е ясно от обстоятелството, че ако  $S$  е дадена структура, а  $v$  е оценка в  $S$  на променливите, то  $v$  съвпада със своята  $\xi, v(\xi)$ -модификация). Току-що отбелязания факт използваме по следния начин:

$$\begin{aligned} \forall \xi_1 \forall \xi_2 \dots \forall \xi_{n-1} \forall \xi_n \varphi &= \forall \xi_2 \dots \forall \xi_{n-1} \forall \xi_n \varphi = \dots = \forall \xi_{n-1} \forall \xi_n \varphi = \forall \xi_n \varphi = \varphi, \\ \varphi &= \exists \xi_n \varphi = \exists \xi_{n-1} \exists \xi_n \varphi = \dots = \exists \xi_2 \dots \exists \xi_{n-1} \exists \xi_n \varphi = \exists \xi_1 \exists \xi_2 \dots \exists \xi_{n-1} \exists \xi_n \varphi. \end{aligned}$$

Накрая ще се спрем на въпроса за това как в известен смисъл може да бъде преодоляна неприменимостта на дадена субституция към дадена формула. Да предположим, че  $\varphi$  е формула, а  $\sigma$  е субституция, която не е приложима към  $\varphi$ . Бихме могли да използваме задоволителен от семантична гледна точка заместител на прилагането на  $\sigma$  към  $\varphi$ , като се основаваме на следните две обстоятелства:

1. Може да се намери формула  $\varphi'$ , еквивалентна на  $\varphi$  и имаща същите свободни променливи, такава, че  $\sigma$  да бъде приложима към  $\varphi'$ .

2. Винаги, когато  $\varphi'$  е формула, еквивалентна на  $\varphi$ , субституцията  $\sigma$  е приложима към  $\varphi'$  и  $(S, v)$  е конфигурация, в сила е равенството  $\sigma(\varphi')^{S, v} = \varphi^{\sigma(S, v)}$ .

За да се убедим във верността на първото от горните твърдения, нека означим с  $\Xi_0$  множеството на променливите, които  $\sigma$  не привнася във  $\varphi$ . По теоремата за ограничаване на избора на свързаните променливи може да се намери такава формула  $\varphi'$ , еквивалентна на  $\varphi$ , че да бъдат изпълнени условията  $CBO(\varphi') = CBO(\varphi)$ ,  $SV\bar{B}(\varphi') \subseteq \Xi_0$ . Първото от тези условия гарантира, че  $\sigma$  привнася във  $\varphi'$  точно онези променливи, които привнася във  $\varphi$ . Оттук веднага следва приложимостта на  $\sigma$  към  $\varphi'$ , като се вземе пред вид второто от условията и се приложи твърдение 1 от предходния въпрос.

Второто от изказаните две твърдения се проверява, като се забележи, че изказаните в него предположения за  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\sigma$ ,  $S$ ,  $v$  осигуряват равенствата  $\sigma(\varphi')^{S, v} = \varphi^{\sigma(S, v)} = \varphi^{\sigma(S, v)}$ .

**Пример 1.** Нека  $\varphi$  е формулата  $p(y) \leftrightarrow \exists x q(x, y)$ , където  $p$  и  $q$  са съответно едноместен и двуместен предикатен символ, а  $x$  и  $y$  са различни променливи. Нека  $\sigma$  е субституцията  $(y := x)$ . Тази субституция не е приложима към формулата  $\exists x q(x, y)$  и следователно не е приложима и към  $\varphi$ . Ако означим обаче с  $\varphi'$  формулата  $p(y) \leftrightarrow \exists z q(z, y)$ , където  $z$  е някаква променлива, различна и от  $x$ , и от  $y$ , то  $\varphi$  е еквивалентна на  $\varphi'$  и  $\sigma$  е приложима към  $\varphi'$ . Като приложим  $\sigma$  към  $\varphi'$ , получаваме формулата  $p(x) \leftrightarrow \exists z q(z, x)$ , която от семантична гледна точка би могла да играе ролята на несъществуващия по нашите дефиниции резултат от прилагането на  $\sigma$  към  $\varphi$ , тъй като стойността ѝ в произволна конфигурация  $(S, v)$  ще бъде равна на  $\varphi^{\sigma(S, v)}$ .

**Забележка.** До резултата от горния пример бихме могли да стигнем по друг начин, като забележим, че формулата  $p(x) \leftrightarrow \exists z q(z, x)$  може да се получи от  $\varphi$  чрез преименуването  $(x, y, z := z, x, y)^\#$ , и приложим теоремата за стойността на резултата от преименуване (за да получим същото заключение както по-горе за стойността на тази формула в произволна конфигурация  $(S, v)$ , би трябвало още да отчетем, че оценката, която е втора компонента на  $\sigma(S, v)$ , съвпада с оценката  $v(x, y, z := z, x, y)$  за единствената свободна променлива  $y$  на  $\varphi$ ). Подобен подход обаче не би бил възможен, ако модифицираме горния пример така, както е посочено в следващия.

**Пример 2.** Нека  $\varphi$  е същата формула както в пример 1, но  $\sigma$  е субституцията  $(y := f(x))$ , където  $f$  е едноместен функционален символ. Тогава  $\sigma$  отново не е приложима към  $\varphi$ , а е приложима към  $\varphi'$ . Резултатът от прилагането ѝ е формулата  $p(f(x)) \leftrightarrow \exists z q(z, f(x))$ , а тя не може да се получи от  $\varphi$  чрез преименуване на променливите. За стойността ѝ в произволна конфигурация  $(S, v)$  отново можем да твърдим, че е равна на  $\varphi^{\sigma(S, v)}$ .

Последно изменение: 26.07.1999 г.