## ТЕОРЕМА ЗА КОМПАКТНОСТ ЗА ПРОИЗВОЛНИ ФОРМУЛИ

Дотук сме доказали две твърдения, носещи името "теорема за компактност". Първото от тях нарекохме "теорема за компактност за безкванторни формули". То гласеше, че всяко локално изпълнимо множество от безкванторни формули е изпълнимо (да припомним, че едно множество от формули се нарича локално изпълнимо, когато всяко крайно негово подмножество е изпълнимо). Второто от споменатите твърдения се наричаше "теорема за компактност за затворени универсални формули" и се доказваше с помощта на теоремата на Ербран (която пък доказахме с помощта на първото). Според това второ твърдение всяко локално изпълнимо множество от затворени универсални формули е изпълнимо.

Сега ще докажем една теорема, която обхваща като частни случаи и двете споменати твърдения.

**Обща теорема за компактност.** Всяко локално изпълнимо множество от формули на предикатното смятане е изпълнимо.

**Доказателство.** Нека $M$ е локално изпълнимо множество от формули на предикатното смятане. Нека $\sigma$ е субституция, която на свободните променливи на формулите от $M$ съпоставя нулместни функционални символи, неучастващи в никоя формула от $M$, така, че на различни такива променливи да отговарят различни символи (такава субституция може да бъде дефинирана след евентуално разширяване на сигнатурата на езика). С $M'$ да означим множеството на формулите, които се получават като приложим $\sigma$ към всяка от формулите от $M$. Така построеното множество $M'$ се състои от затворени формули и знаем от допълнителната лема за равноизпълнимост, че ако то е изпълнимо, $M$ също е изпълнимо. Засега, прилагайки същата лема към крайните подмножества на $M$, можем да забележим, че множеството $M'$ също е локално изпълнимо (използваме, че всяко крайно подмножество на $M'$ може да се получи от някое крайно подмножество на $M$ чрез прилагане на $\sigma$ към формулите от това множество). На всяка формула от $M'$ да съпоставим еквивалентна на нея формула, която е в пренексен вид и не съдържа квантори с една и съща променлива. Нека $M''$ е множеството на така съпоставените формули. Очевидно $M''$ също е локално изпълнимо, а ако докажем, че е изпълнимо, ще можем да заключим, че и $M'$ е изпълнимо. Като заменим всяка формула от $M''$ с подходяща нейна Скулемова нормална форма (евентуално разширявайки сигнатурата на езика), получаваме такова множество $M\cdot$ от затворени универсални формули, за което основната лема за равноизпълнимост позволява да твърдим, че е локално изпълнимо и че ако е изпълнимо, то и $M''$ е изпълнимо. Като приложим към множеството $M\cdot$ теоремата за компактност за затворени универсални формули, получаваме, че това множество е изпълнимо, а оттук, връщайки се назад, заключаваме последователно, че и множествата $M''$, $M'$ и $M$ са изпълними.

Последно изменение: 26.07.1999 г.