ТЕОРЕМА НА ЛЬОВЕНХАЙМ-СКУЛЕМ

Знаем, че при наличието на нулместен функционален символ всяко изпълнимо множество от затворени универсални формули притежава модел, който е Ербранова структура. Без ограничение на общността можем да считаме, че в сигнатурата на езика има не само нулместен функционален символ, но и функционален символ с ненулев брой аргументи, а в такъв случай множеството на затворените термове, което е носителят на коя да е Ербранова структура, ще бъде изброимо. Значи можем да бъдем сигурни, че всяко изпълнимо множество от затворени универсални формули притежава модел с изброим носител. Следната теорема, доказана от Леополд Льовенхайм (Leopold Löwenheim) и Торалф Скулем и носеща техните имена, обобщава горното твърдение за множества от произволни затворени формули.

Теорема на Льовенхайм-Скулем. Всяко изпълнимо множество от затворени формули на предикатното смятане притежава модел с изброим носител.

Доказателство. Нека M е изпълнимо множество от затворени формули. Без ограничение на общността можем да считаме, че всички формули от M са в пренексен вид, като във всяка формула различните квантори са относно различни променливи. Чрез евентуално разширяване на сигнатурата на езика чрез добавяне на нови функционални символи и замяна на формулите от M с подходящи техни Скулемови нормални форми можем да получим такова изпълнимо множество $M\cdot$ от затворени универсални формули, че всеки модел на $M\cdot$ е модел и на M. Според казаното преди малко обаче множеството $M\cdot$ притежава модел с изброим носител.

Теоремата на Льовенхайм-Скулем предизвиква един интересен въпрос във връзка с аксиоматичните системи на теорията на множествата. Ако използваме формално записване, една система от аксиоми за теорията на множествата може да се представи като множество M, състоящо се от някои затворени формули на подходящ език на предикатното смятане. За да има оправдание доказването на теореми въз основа на споменатата система от аксиоми, много е желателно M да е изпълнимо. Но тогава според теоремата на Льовенхайм-Скулем въпросното множество M от затворени формули, представящи аксиомите на теорията на множествата, трябва да има и модел S с някакъв изброим носител C, а това е в привидно противоречие с доказаното в теорията на множествата съществуване на неизброими множества. Скулем е обяснил защо това противоречие е само привидно. А именно - за кое да е множество c в смисъл на S разбира се елементите на C, които принадлежат на c в смисъл на S, образуват множество, равномощно с множеството на естествените числа или с някое негово крайно подмножество, но съответствието, което установява тази равномощност, не е задължено да се представя с функция в смисъл на модела S.

Последно изменение: 26.07.1999 г.