ПРЕДИКАТНО СМЯТАНЕ С РАВЕНСТВО

В повечето от математическите теории наред с други математически понятия играе роля и понятието равенство. Равенството е едно отношение между обекти на теорията, на което свойствата могат да се опишат в подходящ вариант на предикатното смятане, наречен *предикатно смятане с равенство* (досегашното предикатно смятане ще наричаме *общо предикатно смятане)*.

Можем да считаме, че езикът на предикатното смятане с равенство е същият, както на общото предикатно смятане, но при условие, че множеството на двуместните предикатни символи не е празно и сред тях е избран един, който ще наричаме *символ за равенство* и ще означаваме с eq (атомарна формула от вида $\mathrm{eq}(\tau,\tau')$, където τ и τ' са термове, ще записваме още и във вида $(\tau=\tau')$). За всяко множество C ще разглеждаме съответния двуместен предикат Eq_C в C, дефиниран така:

$$Eq_C(c,c') = \begin{cases} 1, & \text{ако } c=c', \\ 0 & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

Предиката Eq_C ще наричаме *предикат за равенство в C*. Една структура $S=(C,I)$ ще наричаме *нормална*, ако $I(\mathrm{eq})=Eq_C$. Една конфигурация (S,v) ще наричаме *нормална*, ако е нормална структурата S.

Редица понятия, които въведохме за общото предикатно смятане, като използвахме произволни структури, имат свои аналози за предикатното равенство с равенство, дефинирани по подобен начин, но с използването само на нормални структури. Например на досегашното понятие тъждествено вярна формула ще съответства понятието *тъждествено вярна формула на предикатното смятане с равенство* - то ще означава формула, която е тъждествено вярна във всяка нормална структура. Аналогично стоят нещата с понятията за следване на една формула от друга и за еквивалентност на две формули в предикатното смятане с равенство. Подобно е положението и с понятието изпълнимост - едно множество M от затворени формули ще наричаме *изпълнимо в предикатното смятане с равенство*, ако съществува нормална структура, в която са верни всички формули от M, а всяка такава структура ще наричаме *модел на M в предикатното смятане с равенство*. Работейки с нормални конфигурации вместо с нормални структури, по аналогичен начин дефинираме понятието изпълнимост и за множество от какви да е (не непременно затворени) формули.

Разбира се, всяка формула, която е тъждествено вярна в общото предикатно смятане, ще бъде тъждествено вярна и в предикатното смятане с равенство. Като пример за това, че обратното не е вярно, може да послужи формулата $\mathrm{eq}(\xi,\xi)$, където ξ е някоя променлива.

Ще изброим някои затворени формули, тъждествено верни в предикатното смятане с равенство, които ще наричаме *аксиоми на равенството* (тъждествената им вярност се проверява чрез директно прилагане на нужните дефиниции). Това са формулите от следните пет вида (за краткост и за по-голяма интуитивна яснота сме ги записали с използване на знак за равенство вместо с използване на символа eq, който те фактически съдържат):

1) $\forall\xi(\xi=\xi)$, където ξ е коя да е променлива;

2) $\forall\xi\forall\eta((\xi=\eta)\to(\eta=\xi))$, където ξ и η са различни помежду си променливи;

3) $\forall\xi\forall\eta\forall\zeta((\xi=\eta)\&(\eta=\zeta)\to(\xi=\zeta))$, където ξ, η и ζ са различни помежду си променливи;

4) $\forall\xi_1\ldots\forall\xi_n\forall\eta_1\ldots\forall\eta_n((\xi_1=\eta_1)\&\ldots\&(\xi_n=\eta_n)\to(\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\omega(\eta_1,\ldots,\eta_n)))$, където $n>0$, $\omega\in\Omega_n$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1,\ldots, \eta_n$ са различни помежду си променливи;

5) $\forall\xi_1\ldots\forall\xi_n\forall\eta_1\ldots\forall\eta_n((\xi_1=\eta_1)\&\ldots\&(\xi_n=\eta_n)\&\pi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\to\pi(\eta_1,\ldots,\eta_n))$, където $n>0$, $\pi\in\Pi_n$, $\pi\neq\mathrm{eq}$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1,\ldots, \eta_n$ са различни помежду си променливи.

Формулите от първите три вида се наричат съответно *аксиоми за рефлексивност*, *за симетрия*, *за транзитивност*, а формулите от последните два вида се наричат *аксиоми за замяна*. Конкретният избор на променливите във всяка една от изброените формули не е съществен - ако вместо едни променливи изберем други, ще получим формула, еквивалентна на дадената в общото предикатно смятане, а следователно и в предикатното смятане с равенство (еквивалентността може да се докаже с помощта на теоремата за преименуване на свързани променливи).

Забележка. Формулите от петия вид, които биха се получили при $\pi=\mathrm{eq}$, имат вида

$$\forall\xi_1\forall\xi_2\forall\eta_1\forall\eta_2((\xi_1=\eta_1)\&(\xi_2=\eta_2)\&(\xi_1=\xi_2)\to(\eta_1=\eta_2)).$$

Те също са тъждествено верни в предикатното смятане с равенство, но не се причисляват към аксиомите на равенството, защото следват от аксиомите за симетрия и за транзитивност.

Последно изменение: 9.09.1999 г.