КОНГРУЕНТНОСТИ. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Освен нормалните структури има и други, в които са верни аксиомите на равенството. Такива са например структурите с носител, имащ повече от един елемент, в които символът eq се интерпретира чрез предикат, който е тъждествено равен на 1, а всеки друг предикатен символ с положителен брой аргументи - чрез предикат, чиято стойност е константна. За да дадем пълно описание на структурите, в които са верни аксиомите на равенството, ще въведем понятието конгруентност в една структура, като наличието на двуместен предикатен символ eq ще предполагаме само при онези разглеждания, за които то е необходимо. Ако $S=(C,I)$ е произволна структура, то *конгруентност в S* ще наричаме ще наричаме кое да е подмножество R на C^2 със следните свойства, където cRd означава, че (c,d) принадлежи на R:

1. За всяко c от C е в сила съотношението cRc.
2. Всеки два елемента c и d на C, удовлетворяващи условието cRd, удовлетворяват и условието dRc.
3. Всеки три елемента c, d и e на C, удовлетворяващи условията cRd и dRe, удовлетворяват и условието cRd.
4. Всеки път, когато $n>0$, $\omega\in\Omega_n$ и $c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n$ са елементи на C, удовлетворяващи условията $c_1Rd_1, ..., c_nRd_n$, налице е и съотношението $I(\omega)(c_1,...,c_n)RI(\omega)(d_1,...,d_n)$.
5. Всеки път, когато $n>0$, $\pi\in\Pi_n$ и $c_1, ... , c_n, d_1, ..., d_n$ са елементи на C, удовлетворяващи условията $c_1Rd_1, ..., c_nRd_n$, в сила е равенството $I(\pi)(c_1,...,c_n)=I(\pi)(d_1,...,d_n)$.

Лесно се вижда, че ако в условието 5 на горната дефиниция заменим знака "=" със знака "≤", ще получим дефиниция, еквивалентна на нея.

Теорема 1. Нека е налице символ eq в Π_2 и $S=(C,I)$ е произволна структура. Нека R е множеството на онези двойки (c,d) от C^2, за които $I(\text{eq})(c,d)=1$. За да бъдат аксиомите на равенството верни в S, необходимо и достатъчно е R да бъде конгруентност в S.

Доказателство. Удобно е да си послужим с варианта на дефиницията за конгруентност, който е с неравенство в условието 5. Ако в изискванията от този вариант на дефиницията вземем пред вид конкретния начин, по който е определена релацията R в случая, получаваме съвкупност от изисквания, за която лесно се проверява, че е удовлетворена точно тогава, когато в S са верни аксиомите на равенството и формулите, споменати в забележката след изброяването на въпросните аксиоми (при проверката може да се използва обстоятелството, че една затворена универсална формула е вярна в дадена структура точно тогава, когато безкванторната част на въпросната формула е тъждествено вярна в дадената структура). Като вземем пред вид казаното в същата забележка, виждаме, че получената съвкупност от изисквания е удовлетворена точно тогава, когато в S са верни аксиомите на равенството.

Ако $S=(C,I)$ е структура, а R е конгруентност в S, то ще дефинираме една нова структура, която ще наричаме *фактор-структура на S относно R* и ще означаваме с S/R. Ще направим това по следния начин. От условията 1, 2 и 3 в дефиницията за конгруентност е ясно, че R е релация на еквивалентност в C, следователно можем да образуваме фактор-множеството C/R на C относно R (елементите на C/R - това са класовете на еквивалентност в C, породени от R, т.е. множествата $[c]_R=\{d|cRd\}$, отговарящи на елементите c на C). Полагаме $S/R=(C/R,I')$, където I' е интерпретиращото съответствие, дефинирано така: $I'(\omega)=[I(\omega)]_R$ при $\omega\in\Omega_0$ и $I'(\pi)=I(\pi)$ при $\pi\in\Pi_0$, а при $n>0$ и произволни $c_1, ..., c_n$ от C имаме $I'(\omega)([c_1]_R,...,[c_n]_R)=[I(\omega)(c_1,...,c_n)]_R$ при $\omega\in\Omega_n$, $I'(\pi)([c_1]_R,...,[c_n]_R)=I(\pi)(c_1,...,c_n)$ при $\pi\in\Pi_n$. Този начин на определяне на $I'(\omega)([c_1]_R,...,[c_n]_R)$ и $I'(\text{p})([c_1]_R,...,[c_n]_R)$ е коректен благодарение съответно на условията 4 и 5 от дефиницията за конгруентност и на обстоятелството, че за произволни c и d от C равенството $[c]_R=[d]_R$ е равносилно със съотношението cRd. Ще покажем, че в известен смисъл структурите S и S/R са неразличими посредством дадения език на предикатното смятане. За тази цел да означим с B множеството на всички наредени двойки от вида $(c,[c]_R)$, където $c\in C$. Начинът, по който дефинирахме интерпретиращото съответствие I', позволява да се твърди, че B е бисимулация между S и S/R, като тази бисимулация очевидно е тотална (дефинициите за бисимулация и за тотална бисимулация бяха дадени във въпроса за безкванторни формули). Сега ще докажем следното важно допълнение към доказаната по-рано бисимулационна лема.

Лема за тоталните бисимулации. Ако B е тотална бисимулация между две конфигурации (S,v) и (S',v'), то за всяка формула φ е в сила равенството $\varphi^{S,v}=\varphi^{S',v'}$. Ако B е тотална бисимулация между две структури S и S', то за всяка затворена формула φ е в сила равенството $\varphi^S=\varphi^{S'}$.

Доказателство. Ако B е тотална бисимулация между две структури S и S', то за всяка оценка v в S на променливите може да се намери такава оценка v' в S' на променливите, че B да бъде тотална бисимулация и между конфигурациите (S,v) и (S',v') (разбира се вярно е и симетричното на това твърдение - за намиране на v по дадено v'). Поради тази причина второто твърдение на лемата представлява следствие от първото и е достатъчно да докажем първото. Доказателството му се извършва чрез индукция, съобразена с дефиницията на понятието формула, като двете структури S и S' могат да се считат фиксирани, но оценките v и v' трябва да могат да варират. Понеже атомарните формули са безкванторни формули, верността на твърдението за тях ни е известна от по-рано. Индуктивните стъпки, отговарящи на образуването на отрицание, на конюнкция и на дизюнкция, се извършват по същия прост начин както по-рано при доказателстовото на бисимулационната лема. Остава да разгледаме случаите на генерализация и на екзистенциализация на формула, имаща доказваното свойство. Нека φ е такава формула, а ξ е променлива. Трябва да докажем, че и формулите ∀ξφ и ∃ξφ имат това свойство. Ще направим това за първата от тях, а за втората разсъжденията са аналогични. За целта при предположение, че B е тотална бисимулация между две конфигурации (S,v) и (S',v'), ще докажем равенството $\forall\xi\varphi^{S,v}=\forall\xi\varphi^{S',v'}$. Последното равенство е равносилно с твърдението, че ако формулата ∀ξφ е вярна в някоя от конфигурациите (S,v) и (S',v'), то тази формула е вярна и в другата от тези конфигурации. Нека например ∀ξφ е вярна в конфигурацията (S,v). За да докажем верността на ∀ξφ в конфигурацията (S',v'), ще предположим, че е даден произволен елемент c' на носителя на S', и ще покажем, че формулата φ е вярна в конфигурацията (S',w'), където w' е ξ,c'-модификацията на v'. Нека c е такъв елемент на носителя на S, че да бъде изпълнено условието cBc' (такова c съществува благодарение на тоталността на B). Да означим с w ξ,c-модификацията на v. Лесно се проверява, че B ще бъде тотална бисимулация и между конфигурациите (S,w) и (S',w') и следователно, по индуктивното предположение, ще бъде в сила равенството $\varphi^{S,w}=\varphi^{S',w'}$. От друга страна, поради верността на формулата ∀ξφ в конфигурацията (S,v) формулата φ е вярна в конфигурацията(S,w), следователно тя е вярна и в конфигурацията (S',w').

Като използваме горната лема и дефинираната преди малко тотална бисимулация между структура и нейна фактор-структура, получаваме веднага следното твърдение.

Теорема 2. Нека S е структура, а R е конгруентност в S. Тогава множеството на затворените формули, които са верни в S, съвпада с множеството на затворените формули, които са верни във фактор-структурата S/R.

От теореми 1 и 2 може да се извлече следното заключение, което ще използваме няколко пъти по-нататък.

Теорема 3. Нека е налице символ eq в Π_2 и S е структура, в която са верни аксиомите на равенството. Тогава съществува такава конгруентност R в S, че фактор-структурата S/R е нормална структура и в нея са верни същите затворени формули както в структурата S.

Доказателство. Нека $S=(C,I)$ и нека R е множеството на онези двойки (c,d) от C^2, за които $I(\mathrm{eq})(c,d)=1$. Според теорема 1 R е конгруентност в S. Следователно можем да образуваме фактор-структурата S/R, имаща носител C/R. Нека I' е нейното интерпретиращо съответствие. Тогава за произволни c и d от C имаме равенството $I'(\mathrm{eq})([c]_R,[d]_R)=I(\mathrm{eq})(c,d)$. Следователно $I'(\mathrm{eq})([c]_R,[d]_R)=1$ точно тогава, когато е изпълнено условието cRd, а то е равносилно с равенството $[c]_R=[d]_R$. Това показва, че $I'(\mathrm{eq})$ е предикатът за равенство в C/R и значи структурата S/R е нормална. По теорема 2 множеството на затворените формули, които са верни в тази структура, съвпада с множеството на затворените формули, които са верни в S.

Последно изменение: 26.07.1999 г.

| Previous | Next | Contents |