НЕСТАНДАРТНИ ЕСТЕСТВЕНИ ЧИСЛА

Ще приложим теоремата за компактност за предикатното смятане с равенство към въпроса за съществуване на един интересен вид разширения на системата на естествените числа.

Ще предполагаме, че за някой език на предикатното смятане, съдържащ двуместния предикатен символ eq, са дадени нормална структура $S=(C,I)$ и редица от затворени термове τ_0, τ_1, τ_2, τ_3, ..., като са изпълнени следните две условия: а) C е множеството на естествените числа 0, 1, 2, 3, ...; б) за всяко c от C стойността на терма τ_c в S е равна на c (от последното условие е ясно, че термовете τ_c, отговарящи на различни стойности на c, трябва да бъдат различни помежду си).[1] Да вземем някоя променлива ξ и да означим с M множеството, състоящо се от всички затворени формули, които са верни в S, и от формулите $\neg(\xi=\tau_0)$, $\neg(\xi=\tau_1)$, $\neg(\xi=\tau_2)$, $\neg(\xi=\tau_3)$, ... Лесно се вижда, че всяко крайно подмножество на M е изпълнимо в предикатното смятане с равенство. И наистина, ако K е крайно подмножество на M, то ще съществува такова c от C, че съответната формула $\neg(\xi=\tau_c)$ да не принадлежи на K, и при това положение една нормална конфигурация, удовлетворяваща K, ще бъде конфигурацията (S,v), където v е такава оценка в S на променливите, че $v(\xi)=c$. Теоремата за компактност за предикатното смятане с равенство позволява да заключим, че и цялото множество M е изпълнимо в предикатното смятане с равенство. Да разгледаме сега някоя нормална конфигурация $(S\hat{},v\hat{})$, удовлетворяваща M. В известен смисъл, който сега ще разясним, структурата $S\hat{}$ може да се разглежда като една нестандартна система на естествените числа.

Нека $S\hat{}=(C\hat{},I\hat{})$. За всяко естествено число c да означим с $c\hat{}$ стойността на терма τ_c в структурата $S\hat{}$. Така дефинираните елементи $c\hat{}$ образуват едно същинско подмножество на носителя $C\hat{}$ на $S\hat{}$. Като пример за елемент на $C\hat{}$, непринадлежащ на това подмножество, можем да посочим елемента $v\hat{}(\xi)$ - за всяко c от C имаме неравенството $v\hat{}(\xi)\neq c\hat{}$ благодарение на това, че формулата $\neg(\xi=\tau_c)$ от M е вярна в нормалната конфигурация $(S\hat{},v\hat{})$. Ще покажем, че елементите $c\hat{}$, отговарящи на различни естествени числа c, са различни помежду си. И наистина нека c и d са две различни естествени числа. Тогава затворената формула $\neg(\tau_c=\tau_d)$ принадлежи на M и следователно е вярна в $S\hat{}$. Тъй като структурата $S\hat{}$ е нормална, това показва, че стойностите $c\hat{}$ и $d\hat{}$ в нея на термовете τ_c и τ_d са различни помежду си. И така, налице е взаимно еднозначно съответствие между естествените числа и съпоставените им по този начин елементи на множеството $C\hat{}$. При това с елементите $c\hat{}$ в определен смисъл може да се работи по същия начин както с естествените числа c, на които са съответни. По-точно, ако ω е n-местен функционален символ, където n е положително цяло число, то всеки път, когато дадени c_1, ..., c_n, d от C са свързани с равенството $I(\omega)(c_1,...,c_n)=d$, ще имаме и равенството $I\hat{}(\omega)(c_1\hat{},...,c_n\hat{})=d\hat{}$, понеже затворената формула $\omega(\tau_{c_1},...,\tau_{c_n})=\tau_d$ ще принадлежи на множеството M и поради това ще бъде вярна в $S\hat{}$. Аналогично се вижда, че ако ω е нулместен функционален символ и имаме равенството $I(\omega)=d$, където d е дадено естествено число, то ще имаме и равенството $I\hat{}(\omega)=d\hat{}$. Подобни неща важат и за интерпретациите в S и в $S\hat{}$ на предикатните символи: всеки път, когато π е n-местен предикатен символ, n е положително цяло число и c_1, ..., c_n са естествени числа, имаме равенството $I(\pi)(c_1,...,c_n)=I\hat{}(\pi)(c_1\hat{}, ...,c_n\hat{})$, а за всеки нулместен предикатен символ π е в сила равенството $I(\pi)=I\hat{}(\pi)$. За да докажем това, най-напред отбелязваме, че за всяка затворена формула φ е изпълнено равенството $\varphi^S=\varphi^{S\hat{}}$. Действително, ако лявата страна на това равенство е 1, то $\varphi\in M$ и следователно φ е вярна в $S\hat{}$, тъй че и дясната страна ще бъде 1, а ако лявата страна е 0, то затворената формула $\neg\varphi$ принадлежи на M и значи е вярна в $S\hat{}$, поради което и дясната страна ще бъде 0. За да получим оттук формулираната връзка между интерпретациите в S и в $S\hat{}$ на предикатните символи, достатъчно е в качеството на φ да вземем формулата $\pi(\tau_{c_1},...,\tau_{c_n})$ в първия случай и формулата π във втория. Ако отъждествим естествените числа със съответните им елементи на $C\hat{}$, бихме могли да считаме, че структурата $S\hat{}$ представлява едно разширение на структурата S, като в носителя $C\hat{}$ на $S\hat{}$ освен естествените числа има и други елементи (можем да ги наречем "нестандартни естествени числа"), но въпреки това свойствата на S и на $S\hat{}$, които се изразяват посредством затворени формули на дадения език на предикатното смятане са едни и същи (например ако едно уравнение, на което двете страни се представят чрез термове на този език, няма решение в структурата S, то няма да има решение и в структурата $S\hat{}$).

В заключение нека отбележим, че с незначителни изменения горните разглеждания могат да се направят и в по-общия случай, когато е дадена произволна нормална структура S с безкраен носител, на който всеки елемент е стойност на някой затворен терм.[2]

Бележки

[1] Например между функционалните символи на езика би могло да има два нулместни, на които стойностите в S са съответно числата 0 и 1, и един двуместен, който се интерпретира в S като операцията събиране, при което споменатата редица от затворени термове да съответства на

представянето на последователните естествени числа във вида 0, 1, 1+1, (1+1)+1, ...

[2] При нашия подход към предикатното смятане това обобщение не е особено съществено, защото и в споменатия по-общ случай носителят на *S* би се оказал изброим. Възможен е обаче и такъв друг подход, при който да е допустимо да има неизброимо много различни затворени термове, и тогава вече обобщението ще обхваща многобройни случаи, съществено различни от разгледания.

Последно изменение: 9.01.2001 г.

Previous	Next	Contents