ЗАКОНИ ЗА ЗАМЯНА В ПРЕДИКАТНОТО СМЯТАНЕ С РАВЕНСТВО

Тъй като аксиомите за замяна са затворени универсални формули, верни във всяка нормална структура, техните безкванторни части са тъждествено верни във всяка такава структура, т.е. и тези безкванторни части са тъждествено верни формули на предикатното смятане с равенство. С други думи, ако n е положително цяло число и $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$ са различни помежду си променливи, то в предикатното смятане с равенство са тъждествено верни формулите от вида

$$(\xi_1=\eta_1)\&...\&(\xi_n=\eta_n)\rightarrow(\omega(\xi_1,...,\xi_n)=\omega(\eta_1,...,\eta_n)),$$

където ω е n-местен функционален символ, и формулите от вида

$$(\xi_1=\eta_1)\&...\&(\xi_n=\eta_n)\&\pi(\xi_1,...,\xi_n)\rightarrow\pi(\eta_1,...,\eta_n),$$

където π е n-местен предикатен символ. Сега ще обобщим това твърдение. В обобщението ще се твърди, че са тъждествено верни в предикатното смятане с равенство някои импликации, които са по-общи от горенаписаните и се наричат обикновено закони за замяна (изказаното по-горе твърдение би се получило в специалния случай на въпросното обобщение, когато $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$ вместо произволни термове са различни помежду си променливи, а τ и θ са съответно термът $\omega(\zeta_1,...,\zeta_n)$ и формулата $\pi(\zeta_1,...,\zeta_n)$).

Закони за замяна в термове и във формули. Нека n е положително цяло число, $\zeta_1, ... ,\zeta_n$ са различни помежду си променливи, а $\xi_1, ..., \xi_n , \eta_1, ..., \eta_n$ са произволни термове. Да означим със σ и с ρ съответно субституцията $(\zeta_1,...,\zeta_n:=\xi_1,...,\xi_n)$ и субституцията $(\zeta_1,...,\zeta_n:=\eta_1,...,\eta_n)$. Тогава следните видове формули са тъждествено верни в предикатното смятане с равенство:

а) $(\xi_1=\eta_1)\&...\&(\xi_n=\eta_n)\rightarrow(\sigma(\tau)=\rho(\tau))$, където τ е произволен терм;

б) $(\xi_1=\eta_1)\&...\&(\xi_n=\eta_n)\&\sigma(\theta)\rightarrow\rho(\theta)$, където θ е произволна формула, към която са приложими субституциите σ и ρ.

Доказателство. Нека $S=(C,I)$ е произволна нормална структура, а v е произволна оценка в S на променливите. Най-напред отбелязваме, че ако в конфигурацията (S,v) е вярна формулата $(\xi_1=\eta_1)\&...\&(\xi_n=\eta_n)$, то е в сила равенството $\sigma(S,v)=\rho(S,v)$. За да се убедим в това, достатъчно е да си припомним дефиницията за резултат от прилагане на субституция към конфигурация и да забележим, че ако в (S,v) е вярна споменатата формула, то ще бъдат в сила равенствата $\xi_i^{S,v}=\eta_i^{S,v}$, $i=1, ..., n$, осигуряващи, че за всяка променлива ζ ще имаме равенството $\sigma(\zeta)^{S,v}=\rho(\zeta)^{S,v}$. От друга страна, за произволен терм τ са в сила равенствата

$$\sigma(\tau)^{S,v}=\tau^{\sigma(S,v)},\ \ \rho(\tau)^{S,v}=\tau^{\rho(S,v)},$$

а за произволна формула θ, към която са приложими субституциите σ и ρ, имаме равенствата

$$\sigma(\theta)^{S,v}=\theta^{\sigma(S,v)},\ \ \rho(\theta)^{S,v}=\theta^{\rho(S,v)}.$$

При това положение става ясно, че ако при условията на точка а) предпоставката на импликацията е вярна в конфигурацията (S,v), то ще бъде изпълнено равенството $\sigma(\tau)^{S,v}=\rho(\tau)^{S,v}$ и значи заключението на импликацията също ще бъде вярно в (S,v). Също тъй ясно става, ако при условията на точка б) предпоставката на импликацията е вярна в конфигурацията (S,v), то ще бъдат изпълнени равенствата $\sigma(\theta)^{S,v}=\rho(\theta)^{S,v}$ и $\sigma(\theta)^{S,v}=1$, тъй че и заключението на импликацията ще бъде вярно в (S,v).

Последно изменение: 26.07.1999 г.