ЗАКОНИ ЗА КВАНТОРИ В СЕКВЕНЦИИ

За случая на кванторите за общност и за съществуване ще докажем някои твърдения, близки по дух до законите за отрицание, конюнкция, дизюнкция и импликация в предпоставката или в заключението на една секвенция. За разлика от по-раншните, някои от новите твърдения ще дават само достатъчни условия за вярност, а не необходими и достатъчни. В тези случаи ще наричаме твърденията закони за въвеждане на квантори, а когато са налице необходими и достатъчни условия, ще пропускаме думите "въвеждане на".

Закон за въвеждане на квантор за общност в предпоставката. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а τ е такъв терм, че субституцията $(\xi:=\tau)$ е приложима към φ. Тогава, ако секвенцията

$$\Gamma\cup\{(\xi:=\tau)(\varphi)\}\,\textbf{-:}\,\Delta$$

е вярна в дадена конфигурация, то и секвенцията

$$\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi\}\,\textbf{-:}\,\Delta$$

е вярна в тази конфигурация.

Доказателство. Знаем, че формулата $(\xi:=\tau)(\varphi)$ следва от формулата $\forall\xi\varphi$. Да предположим сега, че секвенцията $\Gamma\cup\{(\xi:=\tau)(\varphi)\}\,\textbf{-:}\,\Delta$ е вярна в дадена конфигурация (S,v), и да допуснем, че секвенцията $\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi\}\,\textbf{-:}\,\Delta$ не е вярна в (S,v). Тогава всички формули от множеството $\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi\}$ ще бъдат верни в (S,v), а всички формули от множеството Δ ще бъдат неверни в (S,v). Като използваме отбелязаното преди малко следване, оттук получаваме, че всички формули от множеството $\Gamma\cup\{(\xi:=\tau)(\varphi)\}$ са верни в конфигурацията (S,v), а всички формули от множеството Δ са неверни в нея. Това обаче противоречи на верността на секвенцията $\Gamma\cup\{(\xi:=\tau)(\varphi)\}\,\textbf{-:}\,\Delta$ в (S,v).

Закон за квантор за общност в предпоставката. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а τ е такъв терм, че субституцията $(\xi:=\tau)$ е приложима към φ. Тогава, за да бъде секвенцията

$$\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi\}\,\textbf{-:}\,\Delta$$

вярна в дадена конфигурация, необходимо и достатъчно е в тази конфигурация да бъде вярна секвенцията

$$\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi,(\xi:=\tau)(\varphi)\}\,\textbf{-:}\,\Delta.$$

Доказателство. Нека (S,v) е произволна конфигурация. Ако първата от горните две секвенции е вярна в (S,v), то и втората е вярна в (S,v), защото е разширение на първата. Заключението в обратната посока правим, като разсъждаваме директно или приложим закона за въвеждане на квантор за общност в предпоставката, вземайки $\Gamma\cup\{\forall\xi\varphi\}$ в качеството на Γ.

Разбира се, всяко от горните две твърдения остава в сила, ако вместо вярност на секвенциите в дадена конфигурация се разглежда тяхната тъждествена вярност в дадена структура. В твърдението, което сега ще изкажем, направо ще става дума за тъждествена вярност в дадена структура. За по-удобното изказване на това и на някои други твърдения се уславяме да казваме за една променлива η, че е *свободна променлива* на дадена секвенция, ако η е свободна променлива на някоя формула, принадлежаща на предпоставката или на заключението на секвенцията; по аналогичен начин, макар засега това не ни е нужно, дефинираме кога една променлива е *свързана променлива* на дадена секвенция.

Закон за квантор за общност в заключението. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а η е такава променлива, че субституцията $(\xi:=\eta)$ е приложима към φ. Нека освен това η не е свободна променлива на секвенцията

$$\Gamma\,\textbf{-:}\,\Delta\cup\{\forall\xi\varphi\}.$$

В такъв случай, за да бъде гореспоменатата секвенция тъждествено вярна в дадена структура, необходимо и достатъчно е в тази структура да бъде тъждествено вярна секвенцията

$$\Gamma\,\textbf{-:}\,\Delta\cup\{(\xi:=\eta)(\varphi)\}.$$

Доказателство. Нека $S=(C,I)$ е дадена структура. Като използваме, че формулата $(\xi:=\eta)(\varphi)$ следва от формулата $\forall\xi\varphi$, веднага виждаме, че ако първата от горните две секвенции е тъждествено вярна в S, то и втората е тъждествено вярна в S.[1] Да предположим сега, че втората от двете секвенции е тъждествено вярна в S. Ще докажем, че и първата е тъждествено вярна в S. За целта да допуснем, че при някоя оценка v в S на променливите всички формули от Γ са верни в конфигурацията (S,v), а всички формули от $\Delta\cup\{\forall\xi\varphi\}$ са неверни в същата конфигурация. Тогава ще има такъв елемент c на C, че формулата φ да бъде невярна в S при оценката v_ξ^c. Да означим с v' η,c-модификацията на оценката v. Ще покажем, че формулата $(\xi:=\eta)(\varphi)$ е невярна в конфигурацията (S,v'). Това разбира се е очевидно при съвпадане на променливите ξ и η, а ако тези променливи са различни, използваме, че имаме равенствата $(\xi:=\eta)(\varphi)^{S,v'}=\varphi^{(\xi:=\eta)(S,v')}=\varphi^{S,v''}$, където $v''(\xi)=v'(\eta)=c$ и v'' съвпада с v' за променливите, различни от ξ, тъй че v'' съвпада с v_ξ^c за променливите, различни от η, която пък в този случай не есвободна променлива на φ.

Понеже v' може да се отличава от v само за променливата η, която не е свободна променлива на никоя формула от Γ и на никоя формула от Δ, получаваме още, че всички формули от Γ са верни в конфигурацията (S,v'), а всички формули от Δ са неверни в тази конфигурация. Това заедно с установената невярност на формулата $(\xi:=\eta)(\varphi)$ в същата конфигурация противоречи на предположената тъждествена вярност в S на втората от дадените секвенции.

Законите, отнасящи се до квантор за съществуване, са аналогични на горните, като обаче се отличават от тях по това, че се разменят ролите в тях на предпоставката и заключението. Само ще формулираме тези закони, защото доказателствата им са аналогични на изложените по-горе.

Закон за въвеждане на квантор за съществуване в заключението. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а τ е такъв терм, че субституцията $(\xi:=\tau)$ е приложима към φ. Тогава, ако секвенцията

$$\Gamma\text{-:}\Delta\cup\{(\xi:=\tau)(\varphi)\}$$

е вярна в дадена конфигурация, то и секвенцията

$$\Gamma\text{-:}\Delta\cup\{\exists\xi\varphi\}$$

е вярна в тази конфигурация.

Закон за квантор за съществуване в заключението. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а τ е такъв терм, че субституцията $(\xi:=\tau)$ е приложима към φ. Тогава, за да бъде секвенцията

$$\Gamma\text{-:}\Delta\cup\{\exists\xi\varphi\}$$

вярна в дадена конфигурация, необходимо и достатъчно е в тази конфигурация да бъде вярна секвенцията

$$\Gamma\text{-:}\Delta\cup\{\exists\xi\varphi,(\xi:=\tau)(\varphi)\}.$$

Закон за квантор за съществуване в предпоставката. Нека Γ и Δ са крайни множества от формули, ξ е променлива, φ е формула, а η е такава променлива, че субституцията $(\xi:=\eta)$ е приложима към φ. Нека освен това η не е свободна променлива на секвенцията

$$\Gamma\cup\{\exists\xi\varphi\}\text{-:}\Delta.$$

В такъв случай, за да бъде гореспоменатата секвенция тъждествено вярна в дадена структура, необходимо и достатъчно е в тази структура да бъде тъждествено вярна секвенцията

$$\Gamma\cup\{(\xi:=\eta)(\varphi)\}\text{-:}\Delta.$$

Навсякъде в отбелязаните тук закони за квантори в секвенции би могло вместо за вярност в конфигурация или за тъждествена вярност в структура да се говори просто за тъждествена вярност. Поради това въпросните закони и споменатите в началото други закони, отнасящи се до съждителни операции в секвенции, могат да служат за установяване на тъждествена вярност на някои секвенции (разбира се за целта бихме могли да използваме и изучените преди това други методи, като заменим интересуващите ни секвенции с еквивалентни на тях формули).

Бележка

[1] Виждаме даже, че ако първата от двете секвенции е вярна в *S* при дадена оценка на променливите, то втората е вярна в *S* при същата оценка на променливите; при това в тази част от разсъжденията не се използва предположението η да не е свободна променлива на първата секвенция.

Последно изменение: 9.01.2001 г.

| Previous | Next | Contents |