Записки по Теория на рекурсията

събрани от Трифон Трифонов
по лекции на проф. Иван Сосков

Съдържание

ТЕМА 1

Относителна изчислимост и Тюрингова сводимост

Ще разширим понятието машини с неограничени регистри от [**1**], като въведем *машини с неограничени регистри с оракул (МНРО)* . Да си мислим, че освен безкрайна памет от регистри разполагаме и с отнапред зададена частична функция $\chi : \mathbb{N} \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$, която ще наричаме *оракул.* Към основните команди $Z(n), S(n), T(m,n), J(m,n,q)$ ще добавим допълнителната команда $O(n)$, която се обръща към оракула χ със аргумент стойността на n-тия регистър. Ако оракулът даде резултат, този резултат се записва в n-ти регистър, в противен случай изчислението на машината не завършва.

Нека означим множеството от всички команди на МНРО с $\mathcal{K}'$.

Дефиниция 1.1. *Програма за МНРО* наричаме всяка функция $P : [r, r+j] \longrightarrow \mathcal{K}'$. Ще използваме означението $I_l^P = P(l)$, за да означаваме l-тата команда от програмата.

Нека оттук нататък фиксираме един оракул $\chi : \mathbb{N} \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$. Всички понятия за МНР от [**1**] се пренасят директно за МНРО. За да дефинираме изпълнение на МНРО с даден оракул ще дефинираме функцията $val^{P,\chi} : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}'$, която преработва конфигурация, ако текущата команда на програмата P е $O(n)$:

$$val^{P,\chi}(l, a_1, a_2, \dots) \simeq \begin{cases} (l+1, a_1, \dots, a_{n-1}, \chi(a_n), a_{n+1}, \dots), & \text{ако } I_l^P = O(n), \\ (l, a_1, a_2, \dots), & \text{ако } I_l^P \neq O(n) \\ & \text{или } l \notin [r, r+j]. \end{cases}$$

Дефиниция 1.2. *Резултат от изпълнението на програмата P* над входните данни $(a_1, a_2, \dots)$ за n стъпки ще дефинираме чрез функцията $P^{n,\chi}$ по следния начин:

$$P^{0,\chi}(\overline{\mathbf{a}}) = (r, \overline{\mathbf{a}}),$$
$$P^{n+1,\chi}(\overline{\mathbf{a}}) \simeq val^{P,\chi}(P^n(\overline{\mathbf{a}})).$$

Резултат от изпълнението на програмата P ще наричаме функцията

$$\{P\}^\chi(\overline{\mathbf{a}}) \simeq b \iff (\exists n)(P^{n,\chi}(\overline{\mathbf{a}}) = (l, \overline{\mathbf{b}})).$$

Дефиниция 1.3. Казваме, че f е *изчислима относно оракул* χ, ако съществува P - програма за машини с неограничени регистри с оракул, така че:

(1) $\forall \overline{\mathbf{x}}(!f(\overline{\mathbf{x}}) \iff !\{P\}^\chi(\overline{\mathbf{x}}, 0, 0, \dots))$;
(2) Ако $f(\overline{\mathbf{x}}) \simeq y$, то $\{P\}^\chi(\overline{\mathbf{x}}, 0, 0, \dots) \simeq (y, b_2, \dots, b_n, \dots)$.

Дефиниция 1.4. Казваме, че f е *Тюрингово сводима* към χ ($f \leq_T \chi$), ако f е изчислима относно χ.

Свойства на Тюринговата сводимост:

(1) За дадено χ има изброимо много f, така че $f \leq_T \chi$, тъй като програмите за МНРО са изброимо много.
(2) Ако f е изчислима, то $(\forall\chi)(f \leq_T \chi)$, понеже всяка програма за МНР е програма за МНРО с произволен оракул.

По подобен начин можем да релативизираме и понятието частично рекурсивна функция:

Дефиниция 1.5. Казваме, че f е *частично рекурсивна относно* χ, ако f може да се получи с краен брой прилагания на операциите суперпозиция, примитивна рекурсия и минимизация върху базовите функции и χ.

Твърдение 1.6. *Ако f е частично рекурсивна относно χ, то $f \leq_T \chi$.*

Доказателство. Аналогично на доказателството за обикновена изчислимост, като вземем предвид, че програма за χ е:

$$0. \quad O(1)$$

□

Нека си мислим, че сме дали някакво кодиране на програмите с естествени числа и означаваме с φ_e^χ или с $\{e\}^\chi$ функцията, съответстваща на изпълнението програмата с код e и оракул χ. Тогава можем да докажем еквивалент на S_n^m теоремата:

Теорема 1.7 (S_n^m-теорема).

$(\forall m)(\forall n)(\exists S_n^m$ *- пр. рек. функция*$)(\forall a)(\forall \overline{\mathbf{x}})(\forall \overline{\mathbf{y}})(\forall\chi)(\varphi_a^{\chi,(m+n)}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \simeq \varphi^{\chi,(n)}_{S_n^m(a,\overline{\mathbf{x}})}(\overline{\mathbf{y}}))$.

Доказателство. Аналогично на доказателството на S_n^m-теоремата за програми за МНР. Тъй като S_n^m функцията преобразува кодове на програми, то тя не зависи от оракула χ. □

Теорема 1.8 (за рекурсивната определимост). *Нека $n \geq 1$, a е код на програма за МНРО. Тогава има e, такова че:*

$$(\forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}^n)(\forall\chi)(\{e\}^{\chi,(n)}(\overline{\mathbf{x}}) \simeq \{a\}^{\chi,(n+1)}(e, \overline{\mathbf{x}})).$$

Доказателство. Нека $\theta(z, \overline{\mathbf{x}}) \simeq \varphi_a^{\chi,(n+1)}(z, \overline{\mathbf{x}})$, а $\psi(z, \overline{\mathbf{x}}) \simeq \theta(S_n^1(z, z), \overline{\mathbf{x}}) \simeq \varphi_b^{\chi,(n+1)}(z, \overline{\mathbf{x}})$. Тогава, ако $e = S_n^1(b, b)$, то очевидно $\varphi_e^{\chi,(n)}(\overline{\mathbf{x}}) \simeq \varphi_b^{\chi,(n+1)}(b, \overline{\mathbf{x}}) \simeq \theta(S_n^1(b, b), \overline{\mathbf{x}}) \simeq \theta(e, \overline{\mathbf{x}})$. Вижда се, че понеже S_n^m функцията не зависи от оракула χ, то и кодът e също няма да зависи от χ. □

Може да се покаже, че кодът на програмата за универсалната функция за частично рекурсивните относно χ не зависи от оракула χ:

Твърдение 1.9. *Нека $n \geq 1$. Съществува програма за МНРО с код f_n, такава че:*

$$(\forall\chi)(\forall \overline{\mathbf{x}})(\{f_n\}^\chi(a, \overline{\mathbf{x}}) \simeq \{a\}^\chi(\overline{\mathbf{x}})).$$

Доказателство. Аналогично на доказателството на теоремата за универсалната функция. □

Следствие 1.10. *За произволен оракул χ класът на частично рекурсивните функции относно χ съвпада с класа на изчислимите функции относно χ.*

ТЕОРЕМА 1.11 (Втора теорема за рекурсията). *Нека h е изчислима функция. Тогава съществува e, такова че*

$$(\forall\chi)(\forall\overline{\mathbf{x}})(\{e\}^{\chi}(\overline{\mathbf{x}}) \simeq \{h(e)\}^{\chi}(\overline{\mathbf{x}})).$$

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека χ е произволен оракул и $f(a,\overline{\mathbf{x}}) \simeq \{f_n\}^{\chi}(h(a),\overline{\mathbf{x}}) \simeq \varphi_{h(a)}^{\chi,(n)}(\overline{\mathbf{x}})$. Тогава, съгласно Теоремата за рекурсивна определимост има e, така че $(\forall\overline{\mathbf{x}})(\{e\}^{\chi,(n)}(\overline{\mathbf{x}}) \simeq f(e,\overline{\mathbf{x}}) \simeq \{h(e)\}^{\chi,(n)}(\overline{\mathbf{x}}))$. □

Сега ще се спрем по-подробно на понятието Тюрингова сводимост.

ДЕФИНИЦИЯ 1.12. Нека $A, B \subseteq \mathbb{N}$.
Казваме, че A е *Тюрингово сводимо* към B:

$$A \le_T B \iff \chi_A \le_T \chi_B,$$

където χ_A, χ_B са характеристичните функции на множествата A и B.
Казваме, че A е *Тюрингово еквивалентно* на B:

$$A \equiv_T B \iff A \le_T B \,\&\, B \le_T A.$$

Свойства на Тюринговата сводимост за множества:

(1) Ако A е разрешимо, то $(\forall B \subseteq \mathbb{N})(A \le_T B)$, понеже щом χ_A е разрешима, то $\chi_A \le_T \chi$ за произволен оракул χ.
(2) $A \le_T \mathbb{N} \Rightarrow A$ е разрешимо, понеже можем да преведем програмата за МНРО, която свежда χ_A към $\chi_{\mathbb{N}} \equiv \mathcal{O}$ към програма за МНР, като заменим всяка команда $O(n)$ с $Z(n)$.

ТВЪРДЕНИЕ 1.13. $(\forall A \subseteq \mathbb{N})(A \equiv_T \overline{A})$.

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Следната програма свежда χ_A към $\chi_{\overline{A}}$ и $\chi_{\overline{A}}$ към χ_A:

0.	$O(1)$	*// попитай оракула*
1.	$Z(2)$	
2.	$J(1,2,5)$	*// ако $R_1 \neq 0$, то*
3.	$Z(1)$	*// върни 0*
4.	$J(1,1,6)$	*// и спри*
5.	$S(1)$	*// иначе върни 1 и спри*

□

ДЕФИНИЦИЯ 1.14. Нека $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Казваме, че A е *много сводимо* към B

$$A \le_m B \iff (\exists h \text{ - изчислима})(x \in A \iff h(x) \in B).$$

ТВЪРДЕНИЕ 1.15. *Ако A е полуразрешимо, то $A \le_m K$.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Това твърдение ще докажем в по-общ вид в Тема 3. □

ТВЪРДЕНИЕ 1.16. *$A \le_m B, B \le_m C \Rightarrow A \le_m C$.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека $x \in A \iff h(x) \in B$ и $x \in B \iff g(x) \in C$, където g и h са изчислими. Тогава $x \in A \iff g(h(x)) \in C$, т.е. $A \le_m C$. □

Твърдение 1.17. *Ако* $A \leq_m B$, *то* $A \leq_T B$.

Доказателство. Нека h е изчислима функция, такава че $x \in A \iff h(x) \in B$. Тогава следната програма свежда χ_A към χ_B:

0. $exec(h)$ // *тук слагаме програмата за* h

j. $O(1)$ // *питаме оракула дали* $h(x) \in B$

□

Последното твърдение доказва, че m-сводимостта е по-силна от T-сводимостта. За да видим, че неравенството е строго ще покажем, че $\overline{K} \leq_T K$, но $\overline{K} \not\leq_m K$. Във верността на първото неравенство се убедихме в Твърдение 1.13. Да допуснем, че $\overline{K} \leq_m K$ чрез изчислимата функция h. Тогава е ясно, че полухарактеристичната функция $c_{\overline{K}}(x) \simeq c_K(h(x))$ е изчислима, откъдето излиза, че $\overline{K}$ е полуразрешимо, което е противоречие.

Дефиниция 1.18. Казваме, че A е *рекурсивно номеруемо* в B:

$$A \leq_{r.e.} B \iff A = dom(\{a\}^{\chi_B})$$

за някоя програма за МНРО с код a.

Свойства на рекурсивната номеруемост:

(1) Ако A е полуразрешимо, то $(\forall B)(A \leq_{r.e.} B)$. Наистина, ако $A = dom(\{a\})$ за някоя програма за МНР с код a, то ако разгледаме същата програма като програма за МНРО с код b, понеже в нея няма извикване на оракул, то $A = dom(\{a\}^{\chi})$ за произволен оракул χ.

(2) Ако $A \leq_{r.e.} \mathbb{N}$, то A е полуразрешимо, понеже от свойствата на Тюринговата сводимост видяхме, че $\{a'\} = \{a\}^{\chi_{\mathbb{N}}}$, където a' е преводът на a от програма за МНРО в програма за МНР чрез замяна на командите $O(n)$ с $Z(n)$.

Твърдение 1.19. $A \leq_m B, B \leq_{r.e.} C \Rightarrow A \leq_{r.e.} C$.

Доказателство. Нека h е изчислима, такава че $x \in A \iff h(x) \in B$ и a е код на програма, така че $B = dom(\varphi_e^{\chi_C})$. Нека $g(x) \simeq \varphi_e^{\chi_C}(h(x))$. Тогава $x \in A \iff h(x) \in B \iff !g(x)$. Получихме, че $A = dom(g)$ и понеже $g(x) \leq_T \chi_C$, то $A \leq_{r.e.} C$. □

Твърдение 1.20. $A \leq_T B \Rightarrow A \leq_{r.e.} B$.

Доказателство. Нека $\chi_A = \{a\}^{\chi_B}$. Тогава, ако означим с b кода на програмата:

0. $call(a)$ // *тук преписваме програмата с код* a

$j+1$. $Z(2)$

$j+2$. $J(1, 2, j+4)$ // *ако* $R_1 = 0$ *връщаме 0*

$j+3$. $J(1, 1, j+3)$ // *иначе зацикляме*

то очевидно $A = dom(\{b\}^{\chi_B})$. □

Оттук виждаме, че $\leq_T$ е по-силна от $\leq_{r.e.}$. За да видим, че обратното не е вярно, да въведем следните означения:

Дефиниция 1.21. $W_a^B = dom(\{a\}^{\chi_B})$, $K_B = \left\{a \mid a \in W_a^B\right\}$.

Вярно е, че $K_B \leq_{r.e.} B$, като доказателството е аналогично на доказателството, че K е полуразрешимо. Аналогично може да се докаже, че $\overline{K_B} \not\leq_{r.e.} B$, по същия начин, както се доказва, че $\overline{K}$ не е полуразрешимо. За да покажем, че $K_B \not\leq_T B$, ще докажем следното

Твърдение 1.22. $A \leq_{r.e.} B, B \leq_T C \Rightarrow A \leq_{r.e.} C$.

Доказателство. Нека $A = dom(\{a\}^{\chi_B})$ за някоя програма за МНРО с код a. Освен това има програма с код b, за която $\chi_B = \{b\}^{\chi_C}$. Тогава можем да преведем a, като заменим всяка команда $O(n)$ с "извикване" на b, като предварително се погрижим за запазването на стойностите на всички използвани регистри и след това ги възстановим. Така получаваме програма за МНРО a', за която е вярно, че $\{a\}^{\chi_B} = \{a'\}^{\chi_C}$, откъдето $A \leq_{r.e.} C$. $\square$

Твърдение 1.23. $A \leq_T B, B \leq_T C \Rightarrow A \leq_T C$.

Доказателство. Имаме $\chi_A = \{a\}^{\chi_B}$ и $\chi_B = \{b\}^{\chi_C}$. Използвайки същия превод, както в предното твърдение получаваме $\chi_A = \{a'\}^{\chi_C}$, откъдето $A \leq_T C$. $\square$

От друга страна не е вярно, че $A \leq_{r.e.} B, B \leq_{r.e.} C$ влече $A \leq_{r.e.} C$. Ако това беше така, по Твърдения 1.13 и 1.20 имаме $\overline{K} \leq_{r.e.} K$, а $K \leq_{r.e.} \emptyset$, понеже K е полуразрешимо, откъдето $\overline{K} \leq_{r.e.} \emptyset \leq_T \mathbb{N}$. Но по свойствата на рекурсивната номеруемост получавам, че $\overline{K}$ е полуразрешимо, което е противоречие.

Тюринговата сводимост на множества се дефинира като Тюрингова сводимост на характеристичните им функции. Подобно свойство може да се даде и за рекурсивната номеруемост:

Твърдение 1.24. $A \leq_{r.e.} B \iff c_A \leq_T \chi_B$.

Доказателство. Ако $A \leq_{r.e.} B$, то $A = dom(\{a\}^{\chi}_{B})$ и тогава $c_A(x) \simeq \mathcal{O}(\{a\}^{\chi_B}(x))$. Обратно, ако $c_A \leq_T \chi_B$, то $c_A = \{a\}^{\chi_B}$, но $A = dom(c_A)$, откъдето е ясно, че $A \leq_{r.e.} B$. $\square$

Накрая, за рекурсивната номеруемост и Тюринговата сводимост може да се докаже еквивалент на Теоремата на Пост:

Твърдение 1.25 (теорема на Пост). *Нека* $A, B \subseteq \mathbb{N}$. *Тогава*

$$A \leq_T B \iff A \leq_{r.e.} B \,\&\, \overline{A} \leq_{r.e.} B.$$

Доказателство. ($\Rightarrow$) Нека $A \leq_T B$. От Твърдение 1.20 имаме, че $A \leq_{r.e.} B$, от Твърдение 1.13 получаваме, че $\overline{A} \leq_T A \leq_T B$, откъдето отново по Твърдение 1.20 получаваме $\overline{A} \leq_{r.e.} B$.

($\Leftarrow$) Нека $A \leq_{r.e.} B$ и $\overline{A} \leq_{r.e.} B$. Тогава има програми P и Q, такива че $\{P\}^{\chi_B} = c_A$, $\{Q\}^{\chi_B} = c_{\overline{A}}$. Тогава можем да напишем програма PQ, която изпълнява постъпково и паралелно програмите P и Q и завършва с резултат 0 ако P завърши и с резултат 1, ако Q завърши. Тогава

$$\begin{aligned} &(\forall x)(!\,\{P\}^{\chi_B}(x) \vee !\,\{Q\}^{\chi_B}(x)) \\ \Rightarrow &(\forall x)(!\,\{PQ\}^{\chi_B}(x)). \end{aligned}$$

Освен това се вижда, че така дефинирана $\{PQ\}^{\chi_B} = \chi_A$. Оттук получаваме, че $A \leq_T B$.

$\square$

ТЕМА 2

Апроксимации на полуразрешими множества

Дефиниция 2.1. Нека a е програма за МНРО, A е множество, $k \in \mathbb{N}$. Да дефинираме

$$\{a\}_k^A(x) \simeq \begin{cases} \{a\}^A(x) & \text{, ако } ! \, \{a\}^A(x) \text{ и изчислението завършва за } k \text{ стъпки,} \\ 1 & \text{, ако изчислението не завършва за } k \text{ стъпки.} \end{cases}$$

Забележка. Очевидно, ако A е разрешимо, то $(\forall k)(\{a\}_k$ е изчислима). По-общо: вярно е, че $(\forall k)(\{a\}_k$ е изчислима относно A).

За удобство ще въведем и *канонично кодиране* на крайните множества:

Дефиниция 2.2. $D_v = \{x_1, \ldots, x_k\} \iff v = \sum_{i=1}^k 2^{x_i}$, като $D_v = \emptyset \iff v = 0$.

От дефиницията се вижда, че можем да построим тотална изчислима функция δ, така че $\chi_{D_v} = \varphi_{\delta(v)}$. Оттук следва, че можем да построим и функция γ, така че $D_v = W_{\gamma(v)}$. Обратното не е вярно в общия случай, т.е. няма изчислима функция, която ако W_a е крайно полуразрешимо множество да дава каноничен код на крайно множество.

Нека въведем следната номерация на полуразрешимите множества: $W_a = dom(\varphi_a)$. Тогава знаем, че

$$x \in W_a \iff (\exists y)(T_1(a, x, y) \simeq 0),$$

където T_1 е предикатът на Клини - примитивно рекурсивна функция.

Дефиниция 2.3. Нека $W_a^k = \{x \mid x < k \,\&(\exists y < k)(T_1(a, x, y) \simeq 0)\}$.
Редицата $\{W_a^k\}$ наричаме *апроксимация* на W_a.

Свойства на апроксимациите:

(1) W_a^k е крайно;
(2) $W_a^k \subseteq W_a^{k+1}$;
(3) $\bigcup_k W_a^k = W_a$;
(4) Има тотална изчислима $\lambda(a, k)$, така че $W_a^k = D_{\lambda(a,k)}$

Дефиниция 2.4. Нека $n \in \mathbb{N}$. Означаваме $A \restriction n = \{x \in A \mid x < n\}$.

Дефиниция 2.5. *Изчислителна функция* за полуразрешимото W_a наричаме:

$$c(n) = \mu k[W_a^k \restriction n = W_a \restriction n].$$

Забележка. Изчислителната функция не е изчислима в общия случай.

Ще докажем няколко свойства на изчислителната функция.

Твърдение 2.6. $c(n) \leq c(n+1)$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че $W^{c(n+1)} \restriction n = W \restriction n$, тогава от минималността на k в дефиницията на $c(n)$ ще следва, че $c(n) \leq c(n+1)$.
($\subseteq$) Нека $x \in W^{c(n+1)} \restriction n \Rightarrow x < n \,\&\, x \in W^{c(n+1)} \subseteq W \Rightarrow x \in W \restriction n$.
($\supseteq$) Нека $x \in W \restriction n \Rightarrow x < n \,\&\, x \in W \Rightarrow x < n \,\&\, x \in W^{c(n+1)} \Rightarrow x \in W^{c(n+1)} \restriction n$. □

Твърдение 2.7. *Ако W не е крайно, то* $\lim_{n\to\infty} c(n) = \infty$.

Доказателство. Да допуснем, че $(\exists k)(\forall n)(c(n) < k)$. Тогава

$$W^{c(n)} \subseteq W^k \Rightarrow W^{c(n)} \restriction n \subseteq W^k \restriction n \Rightarrow W = W^k,$$

откъдето излиза, че W е крайно - противоречие. □

Твърдение 2.8. $c \equiv_T \chi_{W_a}$.

Доказателство. Имаме $x \in W_a \iff x \in W_a^{c(x+1)} \iff x \in D_{\lambda(a,c(x+1))}$. Оттук, понеже δ е изчислима, се вижда че $\chi_{W_a} \leq_T c$. Обратно, тъй като $c(n) = \mu k[W_a^k \restriction n = W_a \restriction n]$, то c е изчислима относно χ_{W_a}, т.е. $c \leq_T \chi_{W_a}$. □

За удобство оттук нататък ще пишем $f \leq_T W$ вместо $f \leq_T \chi_W$.

Дефиниция 2.9. $\{x_k\} \to x \iff (\exists N)(\forall k > N)(x_k = x)$.

Дефиниция 2.10. Нека $\{\varphi_k\}$ е редица от тотални функции и φ е тотална функция. Казваме, че $\{\varphi_k\} \to \varphi \iff (\forall x)(\{\varphi_k(x)\} \to \varphi(x))$.

Дефиниция 2.11. Казваме, че редицата от функции $\{\varphi_k\}$ е рекурсивна, ако функцията $\lambda k.\lambda x.\varphi_k(x)$ е рекурсивна.

Дефиниция 2.12. Функцията H наричаме *регулатор на сходимост* за редицата $\{\varphi_k\} \to \varphi$, ако $(\forall x)(\forall k > H(x))(\varphi_k(x) = \varphi(x))$.

Лема 2.13 (за модула, за регулатора). *Нека W полуразрешимо. Тогава една тотална $\varphi \leq_T W$ ако и само ако има рекурсивна редица $\{\varphi_k\}$, такава че $\{\varphi_k\} \to \varphi$ и H е регулатор на сходимост за $\{\varphi_k\} \to \varphi$, такъв че $H \leq_T W$.*

Доказателство. ($\Leftarrow$) Тъй като $\varphi(x) = \varphi_{H(x)+1}(x)$, редицата е рекурсивна и $H \leq_T W$, очевидно $\varphi \leq_T W$.

($\Rightarrow$) Нека $\varphi \leq_T W$, т.е. $\varphi = \{a\}^W$. Разглеждаме $\left\{W^k\right\}$ - апроксимация на W. Ще видим, че $\{\chi_{W^k}\} \to \chi_W$. Наистина, нека x е произволно. Тогава $x \in W \iff x \in W^{c(x+1)}$ и тогава $(\forall k > c(x+1))(\chi_{W^k}(x) \simeq \chi_W(x))$.

Нека

$$\begin{aligned} u(x) = \mu q[&\text{ в изчислението на } \{a\}^W(x) \\ &\text{всички аргументи } R_n \text{ на командата } O(n) \text{ са } < q]. \end{aligned}$$

и ще наричаме *use-функция* . Очевидно $u \leq_T W$, понеже можем да изчислим $u(x)$ като симулираме програмата и следим обръщенията към оракула. Тогава $W^{c(u(x))}$ е крайно множество и $W^{c(u(x))} \restriction u(x) = W \restriction u(x)$. Поради дефиницията на u е ясно, че $\varphi(x) = \{a\}^W(x) = \{a\}^{W^{c(u(x))}}$.

Нека $\varphi_k(x) \simeq \{a\}_k^{W^k}(x)$.

(1) $\{\varphi_k\}$ е рекурсивна редица. Наистина, тъй като $W_b^k = D_{\lambda(b,k)}$, то оракулът на $\{a\}_k^{W_b^k}$ е разрешим и оттам функцията $\Phi(k,x) \simeq \varphi_k(x)$ е разрешима.

(2) $\{\varphi_k\} \to \varphi$. Нека $x \in \mathbb{N}$. По условие φ е тотална, тогава изчислението $\{a\}^W(x)$ завършва с резултат y за k_0 стъпки. Нека $u(x) = q, N = max(c(q), k_0)$ и $k > N$ е произволно. $k > c(q) \Rightarrow W^k \restriction q = W^{c(q)} \restriction q = W \restriction q$. Освен това $k > k_0$, откъдето по дефиницията на φ_k е ясно, че $\varphi_k(x) \simeq y$. Оттук следва, че $\{\varphi_k\} \to \varphi$.

(3) Нека

$$H(x) = max(c(u(x)), \text{броят на стъпките в изчислението на } \{a\}^W(x)).$$

Вече видяхме, че H е регулатор на редицата $\{\varphi_k\} \to \varphi$, а от $c \leq_T W$ и $u \leq_T W$ следва, че $H \leq_T W$.

□

Следствие 2.14. *Нека $B \leq_T W$. Тогава съществува рекурсивна редица B_k от крайни множества, такива че:*

(a) $\{\chi_{B_k}\} \to \chi_B$.

(b) *Има регулатор на сходимост за редицата $\{\chi_{B_k}\}$, така че $H \leq_T W$.*

Доказателство. Нека $\chi_B = \{a\}^W$. Не можем да приложим директно Лемата за регулатора, понеже не сме сигурни, че всяка функция от рекурсивната редица $\varphi_k(x) \simeq \{a\}_k^{W_k}(x)$ е характеристична функция на крайно множество. Това може лесно да се поправи, като се дефинира $\varphi_k(x) \simeq sg(k \dot{-} x).\{a\}_k^{W_k}(x)$.

(1) $\{\varphi_k\}$ е рекурсивна редица - доказателството е същото, както в Лемата за регулатора.

(2) $\{\varphi_k\} \to \varphi$. Ако си фиксираме $x \in \mathbb{N}, \varphi(x) \simeq y$ е достатъчно да се дефинира $N = max(c(q), k_0, x)$. Тогава за $k > N > x$, ще имаме $\varphi_k(x) \simeq y$.

(3) $H(x) = max(x, c(u(x)), \text{броят на стъпките в изчислението на } \{a\}^W(x))$.

Тогава крайната редица B_k ще се дефинира както следва:

$$B_k = \left\{ x \mid x < k \,\&\, \{a\}_k^{W_k}(x) \simeq 0 \right\}.$$

□

ТЕМА 3

Тюрингови степени и операция скок

В Тема 1 дефинирахме релацията $\equiv_T$ като симетрично затваряне на рефлексивната и транзитивна релация $\leq_T$. Сета ще разгледаме класовете на еквивалентност на тази релация и структурите, които те образуват.

Дефиниция 3.1. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$. *Тюрингова степен* на A наричаме класа на еквивалентност на A относно релацията $\equiv_T$:

$$d_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\}.$$

Дефиниция 3.2. $d_T(A) \leq d_T(B) \iff A \leq_T B$

Забележка. Дефиницията е коректна, нещо повече: $d_T(A) \leq d_T(B) \iff (\forall A_1 \in d_T(A))(\forall B_1 \in d_T(B))(A_1 \leq_T B_1)$.

Ако означим с D_T множеството от всчки Тюрингови степени, лесно се вижда, че $(D_T, \leq)$ е частично наредено множество. Ще покажем, че то е и горна полурешетка. За целта ще дефинираме операция точна горна граница по следния начин:

Дефиниция 3.3 (Операция $\oplus$ - join). $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$.

Твърдение 3.4. *$d_T(A \oplus B)$ е точна горна граница на $d_T(A)$ и $d_T(B)$.*

Доказателство. Ще докажем съответното твърдение за множества.

(1) $x \in A \iff 2x \in A \oplus B \Rightarrow A \leq_m A \oplus B \Rightarrow A \leq_T A \oplus B$. Аналогично $x \in B \iff 2x+1 \in A \oplus B \Rightarrow B \leq_m A \oplus B \Rightarrow B \leq_T A \oplus B$, т.е. $A \oplus B$ е горна граница на A и B.

(2) Нека $A \leq_T C, B \leq_T C$, по-точно $\chi_A = \{a\}^{\chi_C}, \chi_B = \{b\}^{\chi_C}$. Тогава функцията:

$$\chi_{A \oplus B}(x) \simeq \begin{cases} \varphi_a^{\chi_C}(qt(2,x)) & \text{, ако } rem(2,x) \simeq 0, \\ \varphi_b^{\chi_C}(qt(2,x)) & \text{, ако } rem(2,x) \simeq 1. \end{cases}$$

е изчислима относно χ_C, т.е. $A \oplus B \leq_T C$ и следователно $A \oplus B$ е точна горна граница на A и B.

$\square$

Получихме, че $D_T = (D_T, \leq, \oplus, 0)$ е горна полурешетка, където $0 = d_T(\emptyset) = d_T(R)$, R - разрешимо. Ще дефинираме още една операция над множества и съответно Тюрингови степени.

Дефиниция 3.5. $A' = K_A = \{x \mid x \in dom(\varphi_x^A)\}$. A' наричаме *скок на* A.

Свойства на скока:

(1) $K_A \leq_{r.e.} A$;
(2) $B \leq_{r.e.} A \Rightarrow B \leq_m K_A$. Наистина, нека:

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0 & ,x \in B \\ \neg! & ,x \notin B. \end{cases}$$

По S_n^m теоремата имаме, че има примитивно рекурсивна h, така че $\varphi_{h(x)}^A(y) \simeq g(x,y)$. Тогава $x \in B \iff !\varphi_{h(x)}^A(h(x)) \iff h(x) \in K_A$.

(3) $A \lneq_T K_A$, понеже $\overline{K^A} \nleq_{r.e.} A$.

Твърдение 3.6. $A \leq_T B \iff A' \leq_m B'$.

Доказателство. ($\Rightarrow$) Нека $A \leq_T B$. По свойство (1) $A' \leq_{r.e.} A$ и от Твърдение 1.22 следва, че $A' \leq_{r.e.} B$. Тогава от свойство (2) $A' \leq_m B'$.

($\Leftarrow$) Нека $A' \leq_m B'$. Имаме $A \leq_{r.e.} A \Rightarrow A \leq_m A' \leq_m B'$. Аналогично $\overline{A} \leq_{r.e.} A \Rightarrow \overline{A} \leq_m A' \leq_m B'$. Така получихме, че $A \leq_m B', \overline{A} \leq_m B'$, но по свойство (1) имаме $B' \leq_{r.e.} B$ и следователно по Твърдение 1.19 получаваме, че $A \leq_{r.e.} B, \overline{A} \leq_{r.e.} B$. Оттук по Твърдение 1.25 (Теоремата на Пост) следва, че $A \leq_T B$. □

Следствие 3.7 (Монотонност на скока). $A \leq_T B \Rightarrow A' \leq_T B'$.

От монотонността на операцията скок следва, че следната дефиниция е коректна:

Дефиниция 3.8. $(d_T(A))' = d_T(A')$.

Тъй като $A <_T K_A$, то $d_T(A) \lneq d_T(A')$.

ТЕМА 4

Теорема на Клини-Пост

Дефиниция 4.1. Казваме, че τ е *крайна* част, ако $\tau : [0; n-1] \longrightarrow \mathbb{N}$ е крайна функция. Означаваме с $|\tau| = n$ дължината на интервала, върху който е дефинирана τ. Ще разглеждаме крайните части като низ от 0 и 1, към които е приложима операцията конкатенация. Ще използваме още и следното означение:

$$(\tau * a)(x) \simeq (\tau * n \to a)(x) \simeq \begin{cases} \tau(x) & \text{за } 0 \leq x < n, \\ a & \text{за } x = n. \end{cases}$$

Ако A е множество, ще пишем $\tau \subseteq A$ вместо по-точното $\tau \subseteq \chi_A$. Освен това можем да си мислим, че имаме някакво кодиране на крайни части, което ги нарежда линейно.

Теорема 4.2 (Клини-Пост). *Съществуват множества A и B, такива че $A \not\leq_{r.e.} B$ и $B \not\leq_{r.e.} A$.*

Доказателство. Трябва да намерим A и B такива, че:

$$(\forall e)(\underbrace{A \neq dom(\{e\}^B)}_{R_{2e}} \,\&\, \underbrace{B \neq dom(\{e\}^A)}_{R_{2e+1}}).$$

Ще построим $\chi_A = f$ и $\chi_B = g$ постъпково, като на всяка стъпка построяваме крайни части τ_q и ρ_q съответно от f и g. Дефиницията ще бъде индуктивна.

Да положим $\tau_0 = \rho_0 = \emptyset$. Нека сме дефинирали τ_q, ρ_q, като $|\tau_q| = n_q$, $|\rho_q| = m_q$.

I сл. Нека $q = 2e$. Ще удовлетворяваме изискването R_{2e}. Ще разгледаме случаи в зависимост от отговора на въпроса: "Вярно ли е, че има μ - крайна част, така че $\mu \supseteq \rho_q \,\&!\, \{e\}^\mu (n_q)$?"

I.1) Нека има такава крайна част μ, тогава дефинираме ρ_{q+1} като най малкото такова μ (относно някаква предварително фиксирана наредба) и нека $\tau_{q+1} = \tau_q * (n_q \to 1)$.

I.2) Нека за за никое крайно $\mu \supseteq \rho_q \, \{e\}^\mu (n_q)$ не завършва. Тогава е ясно, че за никое $f \supseteq \rho_q \, \{e\}^f (n_q)$ не завършва и полагаме $\rho_{q+1} = \rho_q, \tau_{q+1} = \tau_q * (n_q \to 0)$.

II сл. Нека $q = 2e+1$. Ще удовлетворяваме изискването R_{2e+1}. Вярно ли е, че $(\exists \mu \supseteq \tau_q)(! \, \{e\}^\mu (m_q))$?

II.1) Нека има такава крайна част μ, тогава дефинираме τ_{q+1} като най малкото такова μ и нека $\rho_{q+1} = \rho_q * (m_q \to 1)$.

II.2) Нека за за никое крайно $\mu \supseteq \tau_q \, \{e\}^\mu (m_q)$ не завършва. Тогава е ясно, че за никое $f \supseteq \tau_q \, \{e\}^f (m_q)$ не завършва и полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q, \rho_{q+1} = \rho_q * (m_q \to 0)$.

За да завършим доказателството ще докажем две симетрични леми:

Лема 4.3. *Нека* $e \in \mathbb{N}, q = 2e$. *Тогава, ако* $f \supseteq \tau_{q+1}, g \supseteq \rho_{q+1}, A_f = \{x \mid f(x) = 0\}, B_g = \{x \mid g(x) = 0\}$, *то* $R_{2e}(A_f, B_g)$, *т.е.* $A_f \neq W_e^{B_g}$.

Доказателство. Разглеждаме $\{e\}^g(n_q), n_q = |\tau_q|$.

I сл. Нека $!\{e\}^g(n_q)$, т.е. $n_q \in W_e^{B_g}$. Тогава по съображения за компактност на изчислението съществува крайно $\mu \subseteq g$, за което $!\{e\}^\mu(n_q)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\mu \supseteq \rho_{q+1}$, понеже μ и ρ_{q+1} имат общо тотално продължение g. Тогава на стъпка $q+1$ сме попаднали в случай **I.1)** и следователно $\tau(n_q) = 1 = f(n_q)$, затова $n_q \notin A_f$ и оттук $A_f \neq W_e^{B_g}$.

II сл. Нека $\neg!\{e\}^g(n_q)$, т.е. $n_q \notin W_e^{B_g}$. Ако допуснем, че $(\exists \mu \supseteq \rho_q)(!\{e\}^\mu(n_q))$, тогава ρ_{q+1} е най-малкото такова и $!\{e\}^{\rho_{q+1}}$. Оттук имаме, че $!\{e\}^g(n_q)$, което е противоречие. Затова $(\nexists \mu \supseteq \rho_q)(!\{e\}^\mu(n_q))$ и попадаме в случай **I.2)**, откъдето $\tau_{q+1}(n_q) = 0 = f(n_q) \iff n_q \in A_f \neq W_e^{B_g}$. □

Лема 4.4. *Нека* $e \in \mathbb{N}, q = 2e+1$. *Тогава, ако* $f \supseteq \tau_{q+1}, g \supseteq \rho_{q+1}, A_f = \{x \mid f(x) = 0\}, B_g = \{x \mid g(x) = 0\}$, *то* $R_{2e+1}(A_f, B_g)$, *т.е.* $B_g \neq W_e^{A_f}$.

Доказателство. Симетрично на предната лема. □

Оттук се вижда, че ако положим $f = \bigcup_q \tau_q, g = \bigcup_q \rho_q$, получаваме условието на Теоремата за A_f и B_g. □

Следствие 4.5. *По Твърдение 1.20 имаме, че* $A \not\leq_T B, B \not\leq_T A$.

Твърдение 4.6. *Нека* $\{A_r\}$ *е редица от множества, никое от които не е разрешимо. Тогава съществува множество* $B \subseteq \mathbb{N}$, *такова, че*

$$(\forall r)(A_r \not\leq_T B \,\&\, B \not\leq_T A_r).$$

Доказателство. Ще простоим χ_B на стъпки. Да положим $\tau_0 = \emptyset$. Нека сме построили τ_q, като $|\tau_q| = n_q$.

I сл. Нека $q = 2\langle r, e\rangle$.

I.1) Нека $\{e\}^{A_r} \simeq 0$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * (n_q \to 1)$.

I.2) Нека $\{e\}^{A_r} \not\simeq 0$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * (n_q \to 0)$.

И в двата подслучая получаваме $\tau_{q+1}(n_q) \not\simeq \{e\}^{\chi_{A_r}}(n_q)$.

II сл. Нека $q = 2\langle r, e\rangle + 1$.

II.1) Нека $(\forall x)(\forall \tau \supseteq \tau_q)(!\{e\}^\tau(x) \Rightarrow \chi_{A_r}(x) \simeq \{e\}^\tau(x))$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q$.

II.2) Нека $(\exists x)(\exists \tau \supseteq \tau_q)(!\{e\}^\tau(x) \not\simeq \chi_{A_r}(x))$. Тогава полагаме τ_{q+1} да е най-малкото такова τ.

Нека положим $f = \bigcup_q \tau_q$ и $B = \{x \mid f(x) = 0\}$. Очевидно $(\forall r)(B \not\leq_T A_r)$, понеже ако допуснем, че $B \leq_T A_r$, то $f = \{e\}^{A_r}$ и за $q = 2\langle r, e\rangle$ ще имаме $\tau_{q+1}(n_q) \not\simeq \{e\}^{\chi_{A_r}}(n_q)$, което е противоречие.

Ще докажем също, че $(\forall r)(A_r \not\leq_T B)$. Да допуснем, че за някое r има e, така че $\chi_{A_r} = \{e\}^f$. Да разгледаме стъпка $q = 2\langle r, e\rangle + 1$.

II.1) Нека $(\forall x)(\forall \tau \supseteq \tau_q)(!\{e\}^\tau(x) \Rightarrow \chi_{A_r}(x) \simeq \{e\}^\tau(x))$. Тогава $\chi_{A_r}(x) \simeq y \iff \{e\}^f(x) \simeq y \Rightarrow (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\{e\}^\tau(x) \simeq y)$. Обратно, ако $(\exists \tau \supseteq \tau_q)(\{e\}^\tau(x) \simeq y)$ и допуснем, че $\chi_{A_r}(x) \not\simeq y$ ще влезем в противоречие с условието на случая. Така получихме:

$$\chi_{A_r}(x) \simeq y \iff (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\{e\}^\tau(x) \simeq y).$$

Така $G_{\chi_{A_r}}$ излиза полуразрешимо, откъдето χ_{A_r} е изчислима и A_r е разрешимо, което е в противоречие с условието на твърдението. Тогава този случай е невъзможен.

II.2) Нека $(\exists x)(\exists \tau \supseteq \tau_q)(!\,\{e\}^{\tau}(x) \not\simeq \chi_{A_r}(x))$, тогава това условие е вярно за τ_{q+1}, откъдето $\{e\}^{f}(x) \not\simeq \chi_{A_e}(x)$ - противоречие с допускането.

Така получихме, че $(\forall r)(A_r \not\leq_T B \,\&\, B \not\leq_T A_r)$. $\square$

Следствие 4.7. *Съществуват неизброимо много две по две Тюрингово несравними ($\|_T$) множества.*

Доказателство. Ще използваме Лемата на Цорн, която гласи, че ако имаме частична наредба с горна граница на всяко линейно наредено подмножество (верига), то тя има максимален елемент.

Разглеждаме множеството

$$I = \{X \mid X \subseteq 2^{\mathbb{N}},\ \text{такова че}\ (\forall A \in X)(\forall B \in X)((A \neq B \Rightarrow A \|_T B)$$
$$\& \, A\ \text{е неразрешимо})\}.$$

с частичната наредба $\subseteq$. От Теоремата на Клини-Пост следва, че $I \neq \emptyset$. Нека $L \subseteq I$ е верига в I. Ще покажем, че $\bigcup L \in I$. Нека $A \neq B \in \bigcup L$. Тогава има $X \in L$, така че $A, B \in X$, но $X \in I \Rightarrow A \|_T B$, т.е. $\bigcup L \in I$.

По Лемата на Цорн имаме $M \neq \emptyset$ - максимален елемент на I. Да допуснем, че M е изброимо, тогава можем да представим $M = \{A_r\}_{r=0}^{\infty}$, като по дефиницията на I знаем, че нито едно от A_r не е разрешимо. Тогава по Твърдение 4.6 имаме $B \|_T A_r$ и оттам $I \ni M' = M \cup \{B\}$ е строго разширение на M - противоречие с максималността на M. Тогава M е неизброимо. $\square$

ТЕМА 5

Генеричност и форсинг. Свойства. Теорема за обръщане на скока

Дефиниция 5.1. Казваме, че A е *генерично множество*, ако за всяко полуразрешимо множетсво S от крайни части е в сила, че:

$$(\exists \alpha \subseteq A)\underbrace{(\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S))}_{\alpha \text{ разрешава } S}.$$

Можем да дадем еквивалентна дефиниция:

Дефиниция 5.2. Казваме, че S е пълно в A, ако $(\forall \alpha \subseteq A)(\exists \beta \in S)(\alpha \subseteq \beta)$. Тогава A е генерично, ако всеки път, когато S е гъсто в A, то A среща S, т.е. $(\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \in S)$.

Множеството $String = \{x \mid x \text{ е код на крайна част}\}$ е полуразрешимо. Ако положим $S_e = W_e \cap String$ се вижда, че можем да подредим всички полуразрешими множества от крайни части в редица. Нещо повече, можем да намерим рекурсивна функция h, която ни дава $S_e = W_{h(e)}$: ако $S = \{(e,x) \mid x \in W_e \cap String\} = W_b^2$ и приложим S_n^m теоремата за множества, то $h(e) = S_1^1(b,e)$.

Генерично множество A можем да построим по следния начин. Подреждаме в някаква редица множествата S_n и строим на стъпки крайни части α_n, които ще апроксимират χ_A. Започваме с $\alpha_0 = \emptyset$. За α_{n+1} си задаваме въпроса - има ли α_n разширение в множеството S_n. Ако такова има, полагаме α_{n+1} да бъде някое от тези разширения. Ако такова няма, то полагаме $\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Вижда се, че тази конструкция осигурява генеричност на A, понеже намира α, което да разрешава всяко полуразрешимо множество от крайни части S.

Нека A е произволно генерично множество. Ще докажем някои свойства на генеричността:

Твърдение 5.3. *A не е крайно.*

Доказателство. Допускаме, че има някое N, така че $x \in A \Rightarrow x < n$, т.е. A е крайно. Нека $S = \{\alpha \mid (\exists m > n)(\alpha(m) \simeq 0)\}$ - очевидно е полуразрешимо. От генеричността на A следва, че има α, така че $\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S)$. Очевидно $\alpha \notin S$, понеже $\alpha \subset A \Rightarrow |\alpha| \leq n$. Тогава $(\forall \beta \supseteq \alpha)(\forall m > n)(\beta(m) \not\simeq 0)$, което е невъзможно. Получихме противоречие с допускането, т.е. A е безкрайно. □

Твърдение 5.4. *Ако $V \subseteq A$ е полуразрешимо, то V е крайно.*

Доказателство. Нека $S = \{\alpha \mid (\exists x)(\alpha(x) \simeq 1 \,\&\, x \in V)\}$ - очевидно е полуразрешимо. От генеричността на A следва, че има α, така че $\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S)$. Вижда се, че $\alpha \notin S$, понеже иначе за някое x $\alpha(x) \simeq 1$, т.е. $x \notin A$, а същевременно $x \in V \subseteq A$. Тогава $(\forall \beta \supseteq \alpha)(\forall x)(\beta(x) \simeq 1 \Rightarrow x \notin V)$. Нека $n \geq |\alpha|$, тогава за всяко $\beta \supseteq \alpha$, такова че $|\beta| = n, \beta(n) = 1$ имаме, че $n \notin V$. Ясно е, че такива β има за всяко $n \geq |\alpha|$, затова елементите на V са ограничени до $|\alpha|$, т.е. V е крайно. $\square$

Следствие 5.5. *A не е полуразрешимо, понеже $A \subseteq A$ е безкрайно.*

Твърдение 5.6. *Ако $V \leq_T A$ е полуразрешимо, то V е разрешимо.*

Доказателство. Нека $V = dom(\{e\})$. Знаем, че $\overline{V} \leq_T V \leq_T A$, затова има a, така че $\overline{V} = dom(\{a\}^A)$. Нека $S = \{\alpha \mid (\exists x \in V)(!\, \{a\}^\alpha (x))\}$. Тъй като S е полуразрешимо, то от генеричността на A следва, че има α, така че $\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S)$. Ако $\alpha \in S$, то $(\exists x \in V)(!\, \{a\}^A (x) \iff x \in \overline{V})$, което е противоречие.

Тогава остава възможността $(\forall \beta \supseteq \alpha)(\forall x \in V)(\neg !\, \{a\}^\beta (x))$. Очевидно, ако $x \in \overline{V}$, то $!\, \{a\}^A (x)$, тогава поради компактността на изчислението има $\beta \subseteq A$, така че $!\, \{a\}^\beta (x)$ и без ограничение на общността можем да считаме, че $\beta \supseteq \alpha$, понеже те имат общо продължение A. Обратно, нека $(\exists \beta \supseteq \alpha)(\{a\}^\beta (x))$. Да допуснем, че $x \in V$, но тогава $\neg !\, \{a\}^\beta (x)$ - противоречие, т.е. $\beta \in \overline{V}$. Получихме

$$x \in \overline{V} \iff (\exists \beta \supseteq \alpha)(!\, \{a\}^\beta (x)),$$

т.е. $\overline{V}$ е полуразрешимо, както и V, откъдето V е разрешимо. $\square$

Дефиниция 5.7. Казваме, че A *моделира* твърдението $F_e(x)$:

$$A \models F_e(x) \iff !\, \{e\}^A (x) \iff x \in W_e^A.$$

Дефиниция 5.8. Казваме, че крайната част α *форсира* твърдението $F_e(x)$:

$$\alpha \Vdash F_e(x) \iff !\, \{e\}^\alpha (x).$$

Свойства на форсинга:

(1) $\alpha \subseteq A \,\&\, \alpha \Vdash F_e(x) \Rightarrow A \models F_e(x)$.
(2) $\alpha \subseteq \beta \,\&\, \alpha \Vdash F_e(x) \Rightarrow \beta \Vdash F_e(x)$.
(3) $A \models F_e(x) \Rightarrow (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash F_e(x))$ - следва от компактност на изчислението.

Лема 5.9. *Множеството $\{(\alpha, e, x) \mid \alpha \Vdash F_e(x)\}$ е полуразрешимо.*

Доказателство.

$$\alpha \Vdash F_e(x) \iff \underbrace{(\exists n)(\{e\}^\alpha (x) \text{ завършва за } n \text{ стъпки})}_{\text{полуразрешимо}}.$$

$\square$

Дефиниция 5.10.

$$A \models \neg F_e(x) \iff A \not\models F_e(x) \iff \neg !\, \{e\}^A (x)$$

При дефиницията на $\alpha \Vdash \neg F_e(x)$ трябва да внимаваме да запазим компактността:

Дефиниция 5.11.

$$\alpha \Vdash \neg F_e(x) \iff (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \nVdash F_e(x)).$$

Теорема 5.12 (компактност на отрицанието). *Нека A е генерично. Тогава:*

$$A \models \neg F_e(x) \iff (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash \neg F_e(x).$$

Доказателство. ($\Leftarrow$) Нека $\alpha \subseteq A \,\&\, \alpha \Vdash \neg F_e(x)$. Да допуснем, че $A \not\models \neg F_e(x)$, т.е. $A \models F_e(x) \Rightarrow (\exists \beta \subseteq A)(\beta \Vdash F_e(x))$. Нека $\gamma = \alpha \cup \beta$. Тогава $\gamma \supseteq \beta \Rightarrow \gamma \Vdash F_e(x)$, но $\gamma \supseteq \alpha, \alpha \Vdash \neg F_e(x) \Rightarrow \gamma \not\Vdash F_e(x)$ - противоречие.

($\Rightarrow$) Нека $A \models \neg F_e(x)$. Търсим $\alpha \subseteq A$, $\alpha \Vdash \neg F_e(x)$, т.е. никое разширение на α да не форсира $F_e(x)$. Това може да се направи само ако A е генерично. Наистина, нека допуснем, че $(\forall \alpha \subseteq A)(\alpha \not\Vdash \neg F_e(x)) \iff (\forall \alpha \subseteq A)(\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash F_e(x))$. Нека $S_{e,x} = \{\beta \mid \beta \Vdash F_e(x)\}$. $S_{e,x}$ е полуразрешимо и освен това е пълно в A, откъдето има $\alpha \subseteq A, \alpha \in S_{e,x} \iff \alpha \Vdash F_e(x) \Rightarrow A \models F_e(x)$, което е противоречие. Така получихме, че $(\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash \neg F_e(x))$. $\square$

Следствие 5.13 (Truth лема). *За A генерично е вярно:*

$$A \models (\neg)F_e(x) \iff (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash (\neg)F_e(x)).$$

Следствие 5.14. *Множеството* $\{(\alpha, e, x) \mid \alpha \Vdash \neg F_e(x)\} \leq_T \emptyset'$.

Доказателство. Допълнението $\{(\alpha, e, x) \mid (\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash F_e(x)\}$ е полуразрешимо и следователно $\leq_m K$. $\square$

Следствие 5.15. *Ако A е генерично, то $A' \equiv_T A \oplus \emptyset'$.*

Доказателство.

(1) $\emptyset' \leq_T A', A \leq_T A' \Rightarrow A'$ е горна граница на $\emptyset'$ и $A \Rightarrow \emptyset' \oplus A \leq_T A'$.
(2) $A' = K_A = \left\{x \mid x \in W_x^A\right\} \leq_{r.e.} A$, следователно съществува e, така че $x \in K_A \iff !\left\{e\right\}^A(x) \iff A \models F_e(x) \iff (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash F_e(x)) \leq_T A \oplus \emptyset'$. A е генерично, затова аналогично $x \in \overline{K_A} \iff \neg!\left\{e\right\}^A(x) \iff A \not\models F_e(x) \iff (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash \neg F_e(x)) \leq_T A \oplus \emptyset'$. Получихме, че $K_A \leq_{r.e.} A \oplus \emptyset', \overline{K_A} \leq_{r.e.} A \oplus \emptyset'$, откъдето по Тероемата на Пост следва, че $K_A = A' \leq_T A \oplus \emptyset'$.

$\square$

Теорема 5.16 (за обръщане на скока, Фридберг). *Нека $\emptyset' \leq_T B$. Тогава съществува генерично A, така че $A' \equiv_T B$.*

Доказателство. Ще строим A, така че $A \leq_T B$ и A да е генерично. Тогава ще получим $A' \equiv_T \emptyset \oplus A \Rightarrow A' \leq_T B$. За обратната посока ще кодираме B в $A \oplus \emptyset'$. Строим крайни части α_n на χ_A.

Да положим $\alpha_0 = \emptyset$. Нека сме построили α_n. Разглеждаме въпроса: "Вярно ли е, че $(\exists \beta \supseteq \alpha_n)(\beta \in S_n)$?". Тъй като множеството

$$V = \{(\alpha, n) \mid (\exists \beta \supseteq \alpha_n)(\beta \in S_n)\}$$

е полуразрешимо, то $V \leq_T K = \emptyset'$, т.е. можем да отговорим на въпроса с оракул $\emptyset'$. Ако отговорът на въпроса е **да**, тогава полагаме α_n^* да е най-малкото такова β, ако отговорът е **не**, тогава $\alpha_n^* = \alpha_n$. Така осигуряваме генеричността на A. Накрая полагаме $\alpha_{n+1} = \alpha_n^* * \chi_B(n)$.

(1) $A \leq_T B$. Наистина, понеже $|\alpha_{x+1}| \geq x$, то $x \in A \iff x \in \alpha_{x+1}$, но както видяхме $\alpha_n \leq_T B \oplus \emptyset' \leq_T B$.
(2) A е генерично, понеже α_n^* осигурява генеричност относно S_n.

(3) $B \leq_T A \oplus \emptyset'$. Имаме $k \in B \iff \alpha_{k+1}(|\alpha_k^*|) = 0$. Можем да построим B като повторим конструкцията, но заменим $\chi_B(n)$ с $\chi_A(|\alpha_n^*|)$. Така ще използваме оракул A и допълнително оракул $\emptyset'$ за отговор на въпроса. Следователно получаваме $B \leq_T A \oplus \emptyset'$.

Получихме, че A е генерично и $A' \equiv_T B$. $\square$

Следствие 5.17. *Съществува $A \not\equiv_T \emptyset$ - генерично, така че $A' \equiv_T \emptyset'$.*

Следствие 5.18. *Съществува A - генерично, така че $\emptyset \lneq_T A \lneq_T A' \equiv_T \emptyset'$.*

ТЕМА 6

Теорема на Джокуш и Шор

Теорема 6.1 (Джокуш-Шор). *Нека V е полуразрешимо, но не е разрешимо. Тогава съществува генерично $A \leq_T V$.*

Доказателство. Нека $\{V^k\}$ за апроксимациите на V съгласно Тема 2. Нека $c(n) = \mu k[V^k \restriction n = V \restriction n]$ е изчислителната функция на V.

Ще строим характеристичната функция на A на стъпки. Нека $\alpha_0 = \emptyset$. Да допуснем, че α_s е построено.

I сл. $s = 2r$. Тогава полагаме $\alpha_{s+1} = \alpha_s * 0$, за да сме сигурни, че A е безкрайно.

II сл. $s = 2r + 1$. Търсим най-малкото $u < s$, така че:

$$(*) \qquad (\forall \delta \subseteq \alpha_s)(\delta \notin S_u^{c(s)})\,\&(\exists \sigma \supseteq \alpha_s)(|\sigma| \leq c(s+1)\,\&\,\sigma \in S_u^{c(s+1)})$$

Ако такова u има, полагаме α_{s+1} да е най-малкото σ, което съответства на най-малкото такова u. В противен случай полагаме $\alpha_{s+1} = \alpha_s$.

Нека $\chi_A = \bigcup_s \alpha_s$. Очевидно $x \in A \iff x \in \alpha_{x+1}$, но $\alpha_n \leq_T c \equiv_T V$ съгласно Твърдение 2.8.

Ще докажем, че A е генерично. Трябва да покажем, че

$$(\forall u)(\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \text{ разрешава } S_u).$$

Да допуснем, че не е така и да изберем най-малкото u, такова че

$$(\nexists \alpha \subseteq A)(\alpha \text{ разрешава } S_u).$$

Ако $v < u$, то съществува низ $(\delta_v \subseteq A)(\delta_v$ разрешава $S_v)$. Нека $\alpha = \bigcup_{v<u} \delta_v$ и s_0 е такова, че $\alpha \subseteq \alpha_{s_0} \subseteq A$. Нека $s_1 > s_0$ е толкова голямо, че ако $v < u$ и $\delta_v \in S_v$, то $\delta_v \in S_v^{c(s_1)}$. Такова s_1 можем да изберем, понеже съгласно Твърдение 2.7 $c(s)$ расте неограничено с нарастването на s.

Да разгледаме нечетна стъпка $s > s_1$ за $v < u$. Ще докажем, че отговорът на въпроса $(*)$ на стъпка s за v е **не**. Знаем, че δ_v разрешава S_v по избора на u. Имаме два случая:

I сл. $\delta_v \in S_v \Rightarrow \delta_v \in S_v^{c(s)} \supseteq S_v^{c(s_1)}$ и тогава $(*)$ няма да е вярно.

II сл. $\delta_v \notin S_v \Rightarrow (\forall \beta \supseteq \delta_v)(\beta \notin S_v)$. Да допуснем, че $(*)$ е вярно за v. Тогава има $\sigma \supseteq \alpha_s \supseteq \alpha_{s_0} \supseteq \alpha \supseteq \delta_v$, така че $|\sigma| \leq c(s+1), \sigma \in S_v^{c(s+1)} \subseteq S_v$, което е противоречие.

Получихме, че за всяка нечетна стъпка $s > s_1$ $(*)$ не е вярно за произволно $v < u$. Освен това за такава стъпка $(*)$ няма да е вярно и за u.

Нека $s > s_1$ е нечетна стъпка. Нека знаем α_s, тогава ще пресметнем $c(s), c(s+1), \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}$. Знаем, че u не удовлетворява $(*)$ на стъпка s. Освен това сме сигурни, че $(\forall \delta \subseteq \alpha_s \subseteq \alpha)(\delta \notin S_u^{c(s)})$ иначе δ ще разреши S_u. Тогава знаем, че $\forall \sigma \supseteq \alpha_s)(|\sigma| \geq c(s+1) \vee \sigma \notin S_u^{c(s+1)})$. Генерираме едновременно всички низове σ, които разширяват α_a и апроксимациите на S_u, докато намерим $\sigma \supseteq \alpha_s, \sigma \in S_u^q$. Такова ще има, понеже има такова $\sigma \in S_u$. Така ще намерим σ, за което ще имаме, че $|\sigma| > c(s+1) \vee q > c(s+1)$. Тогава $c(s+1) \leq max(|\sigma|, q) = k$. От друга страна $V \upharpoonright s+1 = V^k \upharpoonright s+1$. Така намерихме ефективно горна граница за $c(s+1)$. Тогава можем да изчислим $c(s+1)$ - най-малкото такова k. Тъй като вече пресметнатото $c(s+1)$ ще ни даде ефективна горна граница за $c(s)$ по същия начин можем да пресметнем $c(s)$. Тогава въпросът $(*)$ става разрешим и можем да намерим u, а оттам следвайки конструкцията да изчислим α_{s+1}, и да положим $\alpha_{s+2} = \alpha_{s+1} * 0$. Така получихме, че конструкцията е разрешима за $s > s_1$. Но $c \equiv_T V \equiv_T \emptyset$, което е противоречие с условието на Теоремата.

Следователно A е генерично. $\square$

ТЕМА 7

Теорема на Спектър за съществуване на минимални степени

Дефиниция 7.1. Казваме, че A е *минимално*, ако:

(1) $\emptyset \lneq_T A$,
(2) $B \leq_T A \Rightarrow B \leq_T \emptyset \vee B \equiv_T A$.

Дефиниция 7.2. *Дърво* наричаме функцията $T : String \longrightarrow String$, за която:

(1) $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow T(\alpha) \subsetneq T(\beta)$,
(2) $\alpha \parallel \beta \Rightarrow T(\alpha) \parallel T(\beta)$.

Дефиниция 7.3. Казваме, че дървото T е рекурсивно, ако има рекурсивна функция t, така че $(\forall \sigma \in String)(t(\ulcorner \sigma \urcorner) = \ulcorner T(\sigma) \urcorner)$.

Дефиниция 7.4. Нека $\sigma \in String$. Казваме, че $\sigma \in T \iff (\exists \tau)(\sigma \subseteq T(\tau))$.

Дефиниция 7.5. Казваме, че $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ е *клон* на дървото T ($f \subseteq T$), ако $(\forall \sigma \subseteq f)(\sigma \in T)$.

Дефиниция 7.6. Казваме, че T' е *поддърво* на T:

$$T' \subseteq T \iff range(T') \subseteq range(T).$$

Твърдение 7.7. *Ако T' е поддърво на T и $\sigma \in T'$, то $\sigma \in T$.*

Доказателство. Нека $\sigma \in T'$. Тогава $(\exists \tau')(\sigma \subseteq T'(\tau'))$. Но $T' \subseteq T \Rightarrow T'(\tau') \in Range(T)$. Тогава $(\exists \tau)(\sigma \subseteq T(\tau) = T'(\tau'))$, т.е. $\sigma \in T$. □

Следствие 7.8 (запазване на клоните). $f \subseteq T', T' \subseteq T \Rightarrow f \subseteq T$.

Твърдение 7.9. *Нека f е клон на T. Тогава $T(\varepsilon) \subseteq f$.*

Доказателство. Да допуснем, че $T(\varepsilon) \nsubseteq f$. Тогава $(\exists \sigma \subseteq f)(\sigma \parallel T(\varepsilon))$. Да разгледаме такова, τ, за което $\sigma \subseteq T(\tau)$ - такова има, защото f е клон. Освен това $T(\varepsilon) \subseteq T(\tau) \Rightarrow T(\varepsilon)$ и σ имат общо продължение, което е в противоречие с факта, че $\sigma \parallel T(\varepsilon)$. □

Твърдение 7.10. *Нека $T(\sigma) \subseteq f$, а f е клон на T. Тогава*

$$T(\sigma * 0) \subseteq f \vee T(\sigma * 1) \subseteq f.$$

Доказателство. Да допуснем, че $T(\sigma * 0) \nsubseteq f \,\&\, T(\sigma * 1) \nsubseteq f$. Тогава $(\exists \delta \subseteq f)(T(\sigma * 0) \parallel \delta \,\&\, T(\sigma * 1) \parallel \delta)$. Да разгледаме $\rho = T(\sigma) \cup \delta$ - това е възможно, понеже $T(\sigma)$ и δ имат за общо продължение f. Тогава $\rho \subseteq f$, но f е клон $\Rightarrow (\exists \tau)(T(\tau) \supsetneq \rho)$ без ограничение на общността. Тогава

$$T(\tau) \supsetneq \rho \supseteq T(\sigma) \Rightarrow \tau \supsetneq \sigma \Rightarrow T(\tau) \supseteq T(\sigma * 0) \vee T(\tau) \supseteq T(\sigma * 1),$$

което е в противоречие с допускането. □

Дефиниция 7.11. Нека T е дърво. $Ext(\sigma, T)(\tau) = T(\sigma * \tau)$.

Очевидно $Ext(\sigma, T) \subseteq T$, т.е. $Ext(\sigma, T)$ е поддърво на T.

Твърдение 7.12. *f е клон в $Ext(\sigma, T)$ $\iff$ $T(\sigma) \subseteq f \,\&\, f \subseteq T$.*

Доказателство. ($\Rightarrow$) Нека f е клон в $Ext(\sigma, T) \Rightarrow Ext(\sigma, T)(\varepsilon) \subseteq f$. Тогава $T(\sigma * \varepsilon) = T(\sigma) \subseteq f$. Освен това $f \subseteq Ext(\sigma, T) \subseteq T$.

($\Leftarrow$) Нека $T(\sigma) \subseteq f, f \subseteq T$. Нека $\sigma_1 \subseteq f$ е произволно. Да положим $\sigma_2 = T(\sigma) \cup \sigma_1$. $f \subseteq T \Rightarrow (\exists\tau)(T(\tau) \supseteq \sigma_2)$. Но $\sigma_2 \supseteq T(\sigma) \Rightarrow \tau \supseteq \sigma$, т.е. има ρ, така че $\tau = \sigma * \rho$. Тогава $\sigma_1 \subseteq T(\tau) = T(\sigma * \rho) = Ext(\sigma, T)(\rho)$, т.е. f е клон в $Ext(\sigma, T)$. $\square$

Твърдение 7.13. *Нека $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_i \supseteq \dots$ е монотонно намаляваща редица от дървета. Тогава $(\exists f)(\forall i)(f$ е клон на $T_i)$.*

Доказателство. Ще строим $\{\alpha_s\}$ - редица от крайни части на f, така че:

(1) $\alpha_s \subseteq \alpha_{s+1}$,
(2) $(\forall T_i)(\alpha_s \in T_i)$.

Да положим $\alpha_0 = \varepsilon$. Очевидно $(\forall T_i)(\varepsilon \in T_i)$. Нека сме построили α_s с исканите свойства. Ще изберем α_{s+1} това от $\alpha_s * 0$ и $\alpha_s * 1$, което изпълнява свойство (2). Да допуснем, че нито едно от тези разширения на α_s не удовлетворява (2). Тогава има i_0, i_1, така че $\alpha_s * 0 \notin T_{i_0}, \alpha_s * 1 \notin T_{i_1}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $i_0 < i_1$. Тогава $T_{i_0} \supseteq T_{i_1} \Rightarrow \alpha_s * 0 \notin T_{i_1}$. От друга страна $\alpha_s \in T_{i_1}$, откъдето има τ, така че $T_{i_1}(\tau) \supseteq \alpha_s$ и същевременно $T_{i_1}(\tau * 0) \supsetneq \alpha_s, T_{i_1}(\tau * 1) \supsetneq \alpha_s$, т.е. разширяват някое от $\alpha_s * 0$ и $\alpha_s * 1$, което е в противоречие с допускането.

Щом поне едно от $\alpha_s * 0, \alpha_s * 1$ има свойството (2), полагаме α_{s+1} на това разширение на α_s, което има свойството (2). Очевидно е, че (1) също е в сила.

Така $f = \bigcup_s \alpha_s$ е клон на T_i за произволно i. $\square$

Преди да дадем доказателството на Теоремата на Спектър ще дадем още няколко дефиниции и ще докажем няколко техни свойства.

Дефиниция 7.14. . Нека $\sigma \in String$, а T е дърво. Тогава казваме, че (ρ, δ) е *e-разцепване* на σ в T, ако

(1) $\sigma \subseteq \rho, \sigma \subseteq \delta$
(2) $(\exists x)(!\varphi_e^{T(\rho)}(x) \,\&!\varphi_e^{T(\delta)}(x) \,\&\, \varphi_e^{T(\rho)}(x) \neq \varphi_e^{T(\delta)}(x))$.

Дефиниция 7.15. Казваме, че дървото T е *e-разцепващо*, ако $(\forall\sigma)((\sigma * 0, \sigma * 1)$ е *e-разцепване* на $T)$.

Лема 7.16. *Нека T е рекурсивно дърво и σ е низ, такъв че няма e-разцепване на σ в T. Тогава $(\forall f \subseteq Ext(\sigma, T))(\{e\}^f$ е тотална $\Rightarrow \{e\}^f$ е изчислима).*

Доказателство. Нека $f \subseteq Ext(\sigma, T)$, $\{e\}^f$ е тотална, $x \in \mathbb{N}$. Ще намерим ефективно $\{e\}^f(x)$. Тъй като $!\{e\}^f(x)$, то има някое $\tau \subseteq f$, така че $!\{e\}^\tau(x) \simeq \{e\}^f(x)$ поради компактност на изчислението.

Тъй като $f \subseteq Ext(\sigma, T)$, то по Твърдение 7.12 имаме, че $f \subseteq T$. Тогава $(\exists\mu)(T(\mu) \supseteq \tau)$. Очевидно за такива μ ще имаме $!\{e\}^{T(\mu)}(x)$.

Искаме да намерим ефективно някое $\mu \supseteq \sigma$, такова че $!\{e\}^{T(\mu)}(x)$. Това може да се направи като генерираме последователно всички двойки $\langle\mu, k\rangle$ и търсим първата такава, за която $\mu \supseteq \sigma$ и $!\{e\}_k^{T(\mu)}(x)$ за рекурсивното дърво T. Съгласно забележката към Дефиниция 2.1 този процес е ефективен.

Не можем директно да заключим, че $\{e\}^{T(\mu)}(x) \simeq \{e\}^f(x)$, понеже не сме сигурни, че ефективно намереното $\mu \supseteq \tau$.

Да допуснем, че $\{e\}^{T(\mu)}(x) \neq \{e\}^f(x)$. Да вземем произволно $\rho \supseteq \sigma$, така че $T(\rho) \supseteq \tau$. Тогава $!\{e\}^{T(\rho)}(x) = \{e\}^f(x) \neq \{e\}^{T(\mu)}(x)$. Това обаче означава, че (μ, ρ) е e-разцепване на σ в T, което е в противоречие с условието на Лемата.

Така получихме ефективен процес за намиране на $\{e\}^f(x)$, т.е. $\{e\}^f$ е изчислима. □

Лема 7.17. *Нека T е рекурсивно дърво, в което има e-разцепване за произволно σ. Тогава съществува дърво $T^* \subseteq T$, така че T^* е e-разцепващо.*

Доказателство. Ще дефинираме $T^*(\sigma)$ с индукция по $n = |\sigma|$. Полагаме $T^*(\varepsilon) = T(\varepsilon)$. Нека сме дефинирали $T(\sigma)$ за $|\sigma| = n$. Търсим най-малкото $\langle \rho, \delta, x, k\rangle$, такова че $\sigma \subseteq \rho, \sigma \subseteq \delta$ и $!\{e\}_k^{T(\rho)}(x) \neq ! \{e\}_k^{T(\delta)}(x)$. Сигурни сме, че такива има, понеже σ има e-разцепване в T. Полагаме

$$T^*(\sigma * 0) = T(\rho), T^*(\sigma * 1) = T(\delta).$$

Получаваме дървото T^* - рекурсивно и e-разцепващо. Освен това по дефиниция $range(T^*) \subseteq range(T) \Rightarrow T^* \subseteq T$. □

Теорема 7.18 (Спектър). *Съществува минимално множество A.*

Доказателство. Ще построим монотонно намаляваща редица от дървета $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_i \supseteq \dots$, такава че:

(1) $(\forall i)(T_i$ е рекурсивно$)$,
(2) $(\forall e)(T_{2e+2} \models R_e \,\&\, T_{2e+1} \models Q_e)$, където

$$T_{2e+2} \models R_e \iff (\forall f \subseteq T_{2e+2})(f \neq \varphi_e)$$

$$T_{2e+1} \models Q_e \iff (\forall f \subseteq T_{2e+1})(\{e\}^f \text{ е тотална} \Rightarrow \{e\}^f \text{ е изчислима} \vee f \leq_T \{e\}^f).$$

Да положим $T_0(\sigma) = \sigma$, т.е. $T_0 = Id$. Нека T_s е построено.

I сл. $s = 2e+1$. Ще построим T_{s+1}, такова че $T_{s+1} \models R_e$. Трябва да осигурим $(\forall f \subseteq T_{s+1})(f \neq \varphi_e)$.

I.1) φ_e не е тотална. Тъй като f е тотална, е достатъчно да положим $T_{s+1} = T_s$.

I.2) φ_e е тотална. Тъй като $T_s(0) \parallel T_s(1)$, то $(\exists x)(T_s(0)(x) \neq T_s(1)(x))$. Тогава $(\exists i \in \{0,1\})(T_s(i)(x) \neq \varphi_e(x))$. Полагаме $T_{s+1} = Ext(i, T_s)$.

Нека $f \subseteq T_{s+1}$. По Твърдение 7.12 имаме, че $T_s(i) \subseteq f \subseteq T_s$. Тогава $T_s(i)(x) = f(x) \neq \varphi_e(x)$.

II сл. $s = 2e$. Ще построим T_{s+1}, такова че $T_{s+1} \models Q_e$. Трябва да осигурим

$$(\forall f \subseteq T_{s+1})(\{e\}^f \text{ е тотална} \Rightarrow \{e\}^f \text{ е изчислима} \vee f \leq_T \{e\}^f).$$

II.1) Има σ, за което няма e-разцепване в T_s. Полагаме $T_{s+1} = Ext(\sigma, T_s)$. Тогава по Лема 7.16 имаме $T_{s+1} \models Q_e$.

II.2) За произволно σ има e-разцепване в T_s. Тогава по Лема 7.17 имаме T_s^* - рекурсивно и e-разцепващо. Нека $f \subseteq T_s^*$ и $\{e\}^f$ е тотална.

Ще покажем, че $f \leq_T \{e\}^f$ като намерим алгоритъм за пресмятането на f, който използва за оракул $\{e\}^f$. За всяко n ще определим възел α_n, така че $T_s^*(\alpha_n) \subseteq f, |\alpha_n| = n$.

Да положим $\alpha_0 = \varepsilon$. Тъй като $f \subseteq T_s^*$, то $T_s^*(\alpha_0) = T_s(\varepsilon) \subseteq f$.

Нека сме определили α_n. Тъй като T_s^* е e-разцепващо, то $(\alpha_n * 0, \alpha_n * 1)$ е e-разцепване на α_n в T_s^*. Търсим последователно първата двойка $\langle x, k\rangle$, за която

$$!\,\{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*0)}(x) \neq !\,\{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*1)}(x).$$

Тогава да положим

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n * 0 & \text{, ако } \{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*0)}(x) = \{e\}^f(x); \\ \alpha_n * 1 & \text{, ако } \{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*1)}(x) = \{e\}^f(x). \end{cases}$$

Да допуснем, че $T_s^*(\alpha_{n+1}) = T_s^*(\alpha_n * i) \nsubseteq f$. Но тогава по Твърдение 7.10 имаме, че $T_s^*(\alpha_n * (1-i)) \subseteq f$. Тогава, от дефиницията на α_{n+1} имаме, че

$$!\,\{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*(1-i))}(x) = \{e\}^f(x) = !\,\{e\}_k^{T_s^*(\alpha_n*i)}(x),$$

което е в противоречие с факта, че T_s^* е e-разцепващо.

Така получихме α_{n+1} с оракул $\{e\}^f$, като $|\alpha_{n+1}| = n+1$ и $T_{s+1}(\alpha_{n+1}) \subseteq f$.

Тъй като $n = |\alpha_n| \leq |T_{s+1}(\alpha_n)|$, то имаме

$$f(x) \simeq T_{s+1}(\alpha_{x+1})(x) \Rightarrow f \leq_T \{e\}^f.$$

Получихме редицата $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \cdots \supseteq T_i \supseteq \ldots$, която удовлетворява изискванията. По Твърдение 7.13 имаме f, така че $(\forall s)(f \subseteq T_s)$.

Нека $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, т.е. $f = \chi_A$. Ще докажем, че A е минимално.

(1) $\emptyset \lneq_T A$. Да допуснем, че $\emptyset \equiv_T A$. Тогава за някое e ще имаме $f = \varphi_e$. Но тъй като $f \subseteq T_{2e+2}$, а от друга страна $T_{2e+2} \models R_e \Rightarrow f \neq \varphi_e$ - противоречие!

(2) Нека $B \leq_T A$. Тогава има е, така че $\{e\}^f = \chi_B$. Тъй като $f \subseteq T_{2e+1}$, а $T_{2e+1} \models Q_e \Rightarrow \chi_B$ е изчислима или $f \leq_T \chi_B \iff B \leq_T \emptyset \vee A \leq_T B$.

$\square$

Следствие 7.19. *Степента $d_T(A)$ е минимална.*

ТЕМА 8

Рекурсивно номеруеми степени. Теорема на Фридберг и Мучник

Дефиниция 8.1. Казваме, че Тюринговата степен a е *рекурсивно номеруема*, ако $(\exists W \leq_{r.e.} \emptyset)(W \in a)$.

Забележка. Не е задължително всички елементи на a да са полуразрешими множества.

Емил Пост поставя въпроса дали има степен между 0 и $0'$, която е полуразрешима. Ако A е генерично, то в Тема 5 доказахме, че $0 < d_T(A) < 0'$. Но $d_T(A)$, не съдържа полуразрешими множества, иначе A щеше да е полуразрешимо. Отговорът на този въпрос се дава от Теоремата на Фридберг и Мучник.

Теорема 8.2 (Фридберг-Мучник). *Съществуват полуразрешими A и B, такива че $A \nleq_T B, B \nleq_T A$.*

Следствие 8.3 (Проблем на Пост). $0 \lneq_T d_T(A) \lneq_T d_T(K)$. *Наистина, ако $0 \equiv_T d_T(A)$, то $A \leq_T B$, а ако $d_T(A) = d_T(K)$, то $B \leq_T K \leq_T A$.*

Доказателство. Ще въведем няколко дефиниции.

Дефиниция 8.4. $\varphi_{e,q}(x) \simeq y \iff P_e$ завърши над $(x, 0, \dots)$ за $< q$ стъпки с резултат y.

Очевидно е в сила, че $\varphi_e(x) \simeq y \iff (\varphi_{e,q}(x) \simeq y)$.

Дефиниция 8.5. Нека $C \subseteq \mathbb{N}$. $u(C, e, x, q) \simeq max($0,най-голямото обръщение към оракула χ_C в първите $q-1$ стъпки на изчислението на $P_e^{\chi_C}(x, 0, \dots))$ (use-функция) .

Вярно е, че ако $u(A, e, x, q) \simeq u, \varphi^A_{e,q}(x) \simeq y$ и $B \restriction u = A \restriction u$, то $\varphi^B_{e,q}(x) \simeq y$, т.е. $\varphi^B_e(x) \simeq y$.

Ще дефинираме на стъпки A_q, B_q, така че:

(1) A_q, B_q - крайни,
(2) $A_q \subseteq A_{q+1}, B_q \subseteq B_{q+1}$,
(3) $A_q = D_{\rho(q)}, B_q = D_{\lambda(q)}$ за ρ, λ - рекурсивни функции.

На всяка стъпка ще се опитваме да задоволяваме *изискванията* R_i:

$$R_{2e} : \{e\}^A \neq \chi_B$$
$$R_{2e+1} : \{e\}^B \neq \chi_A$$

Номерата на изискванията ще наричаме *приоритети.* Изискванията с по-нисък номер ще имат по-висок приоритет.

За да изпълним изискванията, на всяка стъпка ще поддържаме *свидетел* $x_i^q = \langle z, i \rangle$, който ще потвърждава изискването по следния начин:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{2e}^q \notin B_q &\iff \{e\}_q^{A_q}(x_{2e}^q) \not\simeq 1; \\ x_{2e+1}^q \notin A_q &\iff \{e\}_q^{B_q}(x_{2e+1}^q) \not\simeq 1. \end{aligned}$$

Освен това ще искаме $x(q,e) = x_i^q$ е изчислима функция и

$$\exists \lim_{q \to \infty} x_i^q = x_i,$$

като x_i ще наричаме *окончателен свидетел.*

Ще дефинираме още и ограниченията $r(q,i)$, свързани с i-тото изискване и известни на q-тата стъпка така че да имаме:

$$r(q,i) = \begin{cases} \text{най-големият аргумент на оракула} & \text{, ако } i = 2e \text{ и } \{e\}_q^{A_q}(x_{2e}^q) \simeq 1 \\ \text{най-големият аргумент на оракула} & \text{, ако } i = 2e+1 \text{ и } \{e\}_q^{B_q}(x_{2e+1}^q) \simeq 1 \\ -1 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Ще дефинираме $r(q,i)$ и x_i^q така, че на всяка стъпка да имаме:

$$(**) \qquad r(q,i) = -1 \Rightarrow x_i^q \notin A_q \cup B_q,$$

т.е. свидетелят да изпълнява $(*)$.

Дефиниция 8.6. Казваме, че R_{2e} *предизвиква внимание на стъпка* q, ако $\{e\}_q^{A_q}(x_{2e}^q) \simeq 1, r(q,2e) = -1$. Казваме, че R_{2e+1} *предизвиква внимание на стъпка* q, ако $\{e\}_q^{B_q}(x_{2e+1}^q) \simeq 1, r(q,2e+1) = -1$.

Проверката дали дадено изискване предизвиква внимание на дадена стъпка q е ефективна. Когато R_i предизвика внимание, тогава се налага да причислим свидетеля x_i^q към A или B, за да изпълним $(*)$.

Нека положим $A_0 = B_0 = \emptyset, x_i^0 = \langle 0, i \rangle, r(0,i) = -1$. Всички свидетели са валидни, както и условието $(**)$.

Нека вече сме построили $A_q, B_q, x_i^q, r(q,i)$ и е изпълнено $(**)$.

Ако няма изискване, което да предизвиква внимание, полагаме $A_{q+1} = A_q, B_{q+1} = B_q, r(q+1,i) = r(q,i), x_i^{q+1} = x_i^q$ и по индукционно предположение всичко е наред.

Нека R_i за $i < q$ е изискването с най-голям приоритет, което предизвиква внимание.

I сл. $i = 2e$. Полагаме $A_{q+1} = A_q, B_{q+1} = B_q \cup \{x_i^q\}, r(q+1,i) = u(A_q, i, x_i^q, q), x_i^{q+1} = x_i^q$.

II сл. $i = 2e+1$. Полагаме $A_{q+1} = A_q \cup \{x_i^q\}, B_{q+1} = B_q, r(q+1,i) = u(B_q, i, x_i^q, q), x_i^{q+1} = x_i^q$.

Вижда се, че $r(q+1,i) = -1 \Rightarrow x_i^{q+1} \notin A_{q+1} \cup B_{q+1}$ остава сила.

1) За $j < i$ не променяме свидетелите. Дефинираме $x_j^{q+1} = x_j^q, r(q+1,j) = r(q,j)$. От индукционното предположение имаме $r(q+1,j) = -1 = r(q,j) \Rightarrow x_i^q = x_i^{q+1} \notin A_q \cup B_q$.

2) За $j > i$ се налага да търсим нови свидетели, но такива, че да не нарушат изискванията с по-висок приоритет. За това е достатъчно да ги търсим по-големи от всички максимални аргументи към оракули, които сме имали при задоволяване на по-високо приоритетните изисквания. Дефинираме

$$x_j^{q+1} = \mu z\,[R(z) = j\,\&(\forall k \leq i)(z > r(q+1,k)\,\&\,z \notin A_q \cup B_q)]$$
$$r(q+1,j) = -1.$$

Ясно е, че по дефиниция $x_j^{q+1} \notin A_q \cup B_q$.

Лема 8.7. *Всяко изискване R_i предизвиква внимание на краен брой стъпки и с течение на времето (англ.* eventually*) се задоволява.*

Доказателство. Ще проведем пълна индукция по приоритета i. Да допуснем, че $(\forall j < i)(R_j$ предизвиква внимание на краен брой стъпки). Ще докажем, че това е вярно и за R_i.

Нека s е най-малката такава стъпка, че на стъпки $q \geq s$ изискванията R_j за $j < i$ не предизвикват внимание. Ако допуснем, че $r(s,i) > -1$, тогава това означава, че $s > 0$ и на предната стъпка някое R_j за $j < i$ е предизвикало внимание. Обаче тогава, тъй като $i > j$, то $r(s,i) = -1$ - противоречие. Тогава можем да твърдим, че $r(s,i) = -1$.

Да допуснем, че съществува стъпка $q \geq s$, такава че R_i предизвиква внимание. Тогава за стъпки $q' > q$ R_i не предизвиква внимание, понеже

$$(\forall q' > q)(r(q',i) = r(q,i)),$$

т.е. $r(q,i)$ може да се установи на -1 само ако някое изискване с номер $j < i$ предизвика внимание, а това не може да се случи, понеже $q \geq s$. $\square$

Ще определим $A = \bigcup A_q, B = \bigcup B_q$, т.е.

$$x \in A \iff (\exists q)(x \in D_{\rho(q)})$$
$$x \in B \iff (\exists q)(x \in D_{\lambda(q)}).$$

Очевидно по дефиниция A и B са полуразрешими. От Лемата следва, че за всички стъпки q от дадено място нататък имаме $x_i^q = const = x_i$ и $r(q,i) = const = r(i)$.

Ако $r(i) = -1$, то $x_i \notin A \cup B$, а от друга страна, понеже изискването R_i не се е нарушило повече и следователно

$$\{e\}^A(x_{2e}) \not\simeq 1 \text{ за } i = 2e;$$
$$\{e\}^B(x_{2e+1}) \not\simeq 1 \text{ за } i = 2e+1,$$

т.е. R_i е задоволено.

Ако $r(i) > -1$, то R_i е предизвикало внимание поне един път.

Ако $i = 2e$, то $x_{2e} \in B$ и $!\,\{e\}_q^{\chi_A}(x_{2e} \simeq 1$ за последната стъпка q, когато R_{2e} е предизвикало внимание.

Аналогично, ако $i = 2e+1$, то $x_{2e+1} \in A$ и $!\,\{e\}_q^{\chi_B}(x_{2e+1}) \simeq 1$ за последната стъпка q, когато R_{2e+1} е предизвикало внимание.

В този случай R_i отново се задоволява.

Накрая получихме, че $(\forall e)(\{e\}^A \neq \chi_B\,\&\,\{e\}^B \neq \chi_A)$. $\square$

ТЕМА 9

Номерационна сводимост

Дефиниция 9.1. Оператора $\Gamma : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ наричаме *оператор за сводимост по номеруемост (е-оператор)*, ако:

(1) $x \in \Gamma(A) \iff (\exists D \subseteq A)(x \in \Gamma(D) \,\&\, D$ - крайно) (Γ е компактен),
(2) Съществува рекурсивна функция h, такава че $\Gamma(W_a) = W_{h(a)}$ (Γ е ефективен).

Дефиниция 9.2. Казваме, че A е *е-сводимо* към B:

$$A \leq_e B \iff (\exists \Gamma \text{ - е-оператор})(A = \Gamma(B)).$$

Очевидно е, че $A \leq_e A$ за $\Gamma = Id$. Освен това е вярно и:

Твърдение 9.3. $A \leq_e B, B \leq_e C \Rightarrow A \leq_e C$.

Доказателство. Нека $B = \Gamma(A), C = \Delta(B)$, където Γ и Δ са оператори. Ще покажем, че $\Gamma \circ \Delta = \lambda f.\Gamma(\Delta(f))$ също е е-оператор.

(1) (монотонност) Нека $A \subseteq B$. Тогава $\Delta(A) \subseteq \Delta(B)$ от монотонността на Δ и съответно $\Gamma(\Delta(A)) \subseteq \Gamma(\Delta(B))$, заради монотонността на Γ.
(2) (крайност) Нека $x \in \Gamma(\Delta(A))$. Тогава от крайност на Γ следва, че има $D = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \Delta(A)$, така че $x \in \Gamma(D)$. От $x_i \in \Delta(A)$ и крайността на Δ имаме $D_i \subseteq A$, така че $x_i \in \Delta(D_i)$. Да положим $D' = \bigcup_i D_i$. Тогава очевидно $D' \subseteq A$ и от монотонноста на Δ следва, че $(\forall i)(x_i \in \Delta(D'))$, т.е. $D \subseteq \Delta(D')$. Тогава от монотонността на Γ следва, че $x \in \Gamma(D) \subseteq \Gamma(\Delta(D'))$ за D' - крайно.
(3) (ефективност) $\Gamma(\Delta(W_a)) = \Gamma(W_{\delta(a)}) = W_{\gamma(\delta(a))}$, където рекурсивните функции γ и δ отговарят на ефективните оператори Γ и Δ.

□

Твърдение 9.4. *Нека* $\Gamma : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$. *Тогава* Γ *е (е-оператор)* $\iff$ *има полуразрешимо множество* W*, така че:*

$$\Gamma(A) = \{x \mid (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq A)\}$$

Доказателство. ($\Leftarrow$) Нека $x \in \Gamma(A) \iff (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq A)$.

(1) (крайност) Нека $x \in \Gamma(A) \Rightarrow (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq A)$. Тогава за $D = D_v$ - крайно имаме $x \in \Gamma(D_v)$, понеже $D_v \subseteq D_v$.
(2) (монотонност). Нека $x \in \Gamma(D), D \subseteq A$. Тогава $(\exists v)(\langle v, x\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq D \subseteq A) \Rightarrow x \in \Gamma(A)$.
(3) (ефективност) $x \in \Gamma(W_a) \iff (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq W_a)$. Нека

$$R = \{(a, x) \mid \underbrace{(\exists v)(\langle v, x\rangle \in W \,\&(\forall y \in D_v)(y \in W_a))}_{\text{полуразрешимо условие}}\}.$$

Тогава $R = W_e$ и $(a, x) \in R \iff x \in \Gamma(W_a)$. Ако положим $h(a) = S^1_1(e, a)$, тогава имаме

$$x \in \Gamma(W_a) \iff (a, x) \in R \iff x \in W_{S^1_1(e,a)} \iff x \in W_{h(a)}.$$

$(\Rightarrow)$ Нека Γ е компактен и ефективен. Тогава

$$\begin{aligned}
x \in \Gamma(A) &\iff (\exists D \text{ - крайно})(D \subseteq A \,\&\, x \in \Gamma(D)) \\
&\iff (\exists v)(D_v \subseteq A \,\&\, x \in \Gamma(D_v)) \\
&\iff (\exists v)(D_v \subseteq A \,\&\, x \in \Gamma(W_{\lambda(v)})) \\
\text{(ефективност)} &\iff (\exists v)(D_v \subseteq A \,\&\, x \in W_{h(\lambda(v))}) \\
&\iff (\exists v)(D_v \subseteq A \,\&\, \langle x, v\rangle \in W),
\end{aligned}$$

$$\text{където } W = \left\{\langle x, v\rangle \mid x \in W_{h(\lambda(v))}\right\}.$$

$\square$

Вижда се, че всяко полуразрешимо множество определя е-оператор. Затова за удобство ще пишем $W(A)$ вместо $\Gamma_W(A)$, където Γ_W е е-операторът, определен от полуразрешимото W.

Дефиниция 9.5. Нека $A \subseteq \mathbb{N}^2$. *Свъортка* на A наричаме множеството

$$\langle A\rangle = \{\langle x, y\rangle \mid (x, y) \in A\}.$$

Дефиниция 9.6. Нека f е частична функция. *Графика* на f наричаме множеството

$$G_f = \{(x, y) \mid f(x) \simeq y\}.$$

С $\langle f\rangle$ ще бележим $\langle G_f\rangle$.

Дефиниция 9.7. Казваме, че $\varphi \leq_e \psi \iff \langle\varphi\rangle \leq_e \langle\psi\rangle$.

Забележка. Аналогично ще пишем $\varphi \leq_e A, A \leq_e \varphi$ вместо $\langle\varphi\rangle \leq_e A, A \leq_e \langle\varphi\rangle$.

Твърдение 9.8. *$\varphi \leq_T \psi \Rightarrow \varphi \leq_e \psi$.*

Доказателство. Нека $\varphi \leq_T \psi$. Тогава има програма e, така че $\{e\}^\psi = \varphi$. Търсим е-оператор Γ, т.е. полуразрешимо W, като

$$x \in \Gamma(A) \iff (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq A),$$

така че $\Gamma(\langle\psi\rangle) = \langle\varphi\rangle$.

Нека $W = \left\{\langle\langle x, y\rangle, v\rangle \mid \{e\}^{\rangle D_v\langle}(x) \simeq y\right\}$, където $\rangle D\langle(x) \simeq \mu y\,[\langle x, y\rangle \in D]$. W е полуразрешимо множество. Тогава имаме

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in \Gamma(\langle\psi\rangle) &\iff (\exists v)(\langle\langle x, y\rangle, v\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq \langle\psi\rangle) \\
&\iff (\exists v)(\{e\}^{\rangle D_v\langle}(x) \simeq y \,\&\, D_v \subseteq \langle\psi\rangle) \\
&\iff (\exists \text{ крайно } D \subseteq \langle\psi\rangle)(\{e\}^{\rangle D\langle}(x) \simeq y) \\
&\iff (\exists \text{ крайна } \theta \subseteq \psi)(\{e\}^{\theta}(x) \simeq y) \\
&\iff \{e\}^{\psi}(x) \simeq y \\
&\iff \varphi(x) \simeq y \\
&\iff \langle x, y\rangle \in \langle\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Тъй като Γ е е-оператор, то $\varphi \leq_e \psi$. $\square$

Така видяхме, че номерационната сводимост е по-слаба от Тюринговата сводимост. За да видим, че тя е строго по-слаба, ще докажем, че $\chi_K \leq_e c_{\overline{K}}$, но $\chi_K \nleq_T c_{\overline{K}}$.

(1) Да допуснем, че $\chi_K \leq_T c_{\overline{K}}$. Тогава има програма e, така че $\{e\}^{c_{\overline{K}}} = \chi_K$ - тотална. Тогава при всяко изпълнение на програмата, т.е. при всяко извикване на оракула програмата завършва. Но $!c_{\overline{K}}(x) \simeq y \iff y = 0$, тогава можем да заменим всяка команда $O(n)$ в програмата e с командата $Z(n)$ и ще получим прогама за МНР, която изчислява χ_K, което е противоречие.

(2) Нека

$$\begin{aligned} W = \{ \langle \langle x, 1 \rangle, v \rangle \mid x \in \mathbb{N} \,\&\, D_v = \{ \langle x, 0 \rangle \} \} \cup \\ \{ \langle \langle x, 0 \rangle, v \rangle \mid x \in K \,\&\, D_v = \emptyset \}. \end{aligned}$$

Тогава W определя е-оператор и се вижда, че $W(c_{\overline{K}}) = \chi_K$.

Ще дадем дефиниция за рекурсивен оператор, която може да се намери и в [**1**].

Дефиниция 9.9. Оператора $\Delta : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_m$ наричаме *рекурсивен оператор*, ако:

(1) $\Delta(\varphi)(\overline{x}) \simeq y \iff (\exists$крайна $\theta \subseteq \varphi)(\Delta(\theta)(\overline{x}) \simeq y)$ (Δ е компактен),
(2) Съществува рекурсивна функция h, такава че $\Delta(\varphi_a^{(n)}) = \varphi_{h(a)}^{(m)}$ (Δ е ефективен).

Ще докажем, че рекурсивните оператори свеждат номерационно една функция към друго по същия начин, по който е-операторите свеждат множества. Първо ще докажем следната

Лема 9.10. *Съществува рекурсивна функция λ, такава че $D_{\lambda(v)} = \ulcorner \theta_v \urcorner$, където θ_v е крайната функция с код v.*

Доказателство.

$$\begin{aligned} \theta_v(x) \simeq y &\iff \langle x, y \rangle \in \langle \theta_v \rangle \\ &\iff (\exists n \leq v)(p_n | v \,\&\, v = p_n^{\langle x, y \rangle}.u \,\&\, p_n \nmid u). \end{aligned}$$

Тогава

$$\lambda(v) = \sum_{i=0}^{n} 2^{\langle x_i, y_i \rangle} \text{ за } v = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\langle x_i, y_i \rangle}.$$

□

Твърдение 9.11. *Нека Δ е рекурсивен оператор, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $\Delta(\varphi) = \psi$. Тогава $\psi \leq_e \varphi$.*

Доказателство. От кодирането на крайни функции знаем, че има рекурсивна функция μ, за която $\theta_v = \varphi_{\mu(v)}$. Тогава

$$\begin{aligned}
\psi(x) \simeq \Delta(\varphi)(x) \simeq y &\iff (\exists v)(\theta_v \subseteq \varphi \,\&\, \Delta(\theta_v)(x) \simeq y)\\
&\iff (\exists v)(\theta_v \subseteq \varphi \,\&\, \Delta(\varphi_{\mu(v)})(x) \simeq y)\\
&\iff (\exists v)(\theta_v \subseteq \varphi \,\&\, \varphi_{h(\mu(v))}(x) \simeq y)\\
&\iff (\exists v)(D_{\lambda(v)} \subseteq \langle\varphi\rangle \,\&\, \Phi_1(h(\mu(v)), x) \simeq y)\\
&\iff (\exists v')(\exists v)(\lambda(v) = v' \,\&\, \varphi_{h(\mu(v))}(x) \simeq y \,\&\, D_{v'} \subseteq \langle\varphi\rangle)\\
&\iff (\exists v')(\langle\langle x, y\rangle, v'\rangle \in W \,\&\, D_{v'} \subseteq \langle\varphi\rangle),\\
\text{където } W = \big\{\langle\langle x, y\rangle, v'\rangle &\mid (\exists v)(\lambda(v) = v' \,\&\, \varphi_{h(\mu(v))}(x) \simeq y)\big\}\\
&\iff \langle\psi\rangle = W(\langle\varphi\rangle).
\end{aligned}$$

□

Аналогично на е-операторите, можем да въведем Т-оператори, които свеждат Тюрингово функции:

Дефиниция 9.12. Казваме, че $\Delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ е Т-оператор, ако има програма e за МНРО, така че

$$\Delta(\varphi) = \{e\}^{\varphi}\,.$$

Лесно се вижда, че всеки Т-оператор е компактен и ефективен, така че от Твърдение 9.11 още един път можем да видим, че Тюрингово сводимите функции са и номерационно сводими. Обратното твърдение е вярно само за тоталните функции. За да докажем това, ще въведем няколко дефиниции и ще докажем Основната теорема за номерационни оператори.

Както всяко полуразрешимо множество задава е-оператор, така и всяка програма задава T оператор. Ясно е също, че

$$\varphi \leq_T \psi \iff (\exists \Delta \text{ - Т-оператор})(\Delta(\psi) = \varphi).$$

Дефиниция 9.13. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че φ *униформизира* множеството A, ако:

(1) $\varphi(x) \simeq y \Rightarrow \langle x, y\rangle \in A$.
(2) $(\exists y)(\langle x, y\rangle \in A) \Rightarrow !\varphi(x)$.

Теорема 9.14 (Основна теорема за оператори). *Нека W е полуразрешимо множество. Тогава съществува Т-оператор Δ, така че ако φ е тотална, то $\Delta(\varphi)$ униформизира множеството $W(\langle\varphi\rangle)$.*

Доказателство. Тъй като W е полуразрешимо, то съществува рекурсивна функция f, която го номерира, т.е. $f(i) = \langle\langle x_i, y_i\rangle, v_i\rangle$. Да разгледаме функцията

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} y_i & \text{, ако } x = x_i, (\forall \langle u, v\rangle \in D_{v_i})(\varphi(u) \simeq v);\\ \neg ! & \text{, иначе.}\end{cases}$$

Очевидно $\psi \leq_T \varphi$, така че има e, за което $\{e\}^{\varphi} = \psi$ и e не зависи от φ. Тогава ако зададем $\Delta(\varphi) = \{e\}^{\varphi}$ се вижда, че за произволна тотална φ имаме, че $\Delta(\varphi)$ униформизира $W(\langle\varphi\rangle)$. □

Следствие 9.15. *Ако φ е тотална и $\psi \leq_e \varphi$, то $\psi \leq_T \varphi$.*

Доказателство. $\psi \leq_e \varphi \Rightarrow (\exists W)(W(\langle\varphi\rangle) = \langle\psi\rangle)$. По Основната теорема за оператори има Т-оператор Δ, така че $\Delta(\varphi)$ униформизира $\langle\psi\rangle$. Тогава $\Delta(\varphi) = \psi$. $\square$

ТЕМА 10

Номерационни степени

В Тема 9 дефинирахме релацията $\leq_e$ и видяхме, че тя е рефлексивна и транзитивна. Да разгледаме сега нейното симетрично затваряне:

Дефиниция 10.1. $A \equiv_e B \iff A \leq_e B \,\&\, B \leq_e A$.

Така получената релация е вече релация на еквивалентност и нейните класове на еквивалентност наричаме номерационни степени.

Дефиниция 10.2. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$. *Номерационна степен* на A наричаме класа на еквивалентност на A относно релацията $\equiv_e$:

$$d_e(A) = \{B \mid B \equiv_e A\}\,.$$

Подобно на Тюринговите степени и тук можем да въведем частична наредба на степените:

Дефиниция 10.3. $d_e(A) \leq d_e(B) \iff A \leq_e B$

Забележка. Дефиницията е коректна, нещо повече: $d_e(A) \leq d_e(B) \iff (\forall A_1 \in d_e(A))(\forall B_1 \in d_e(B))(A_1 \leq_e B_1)$.

Ако означим с D_e множеството от всчки номерационни степени, то $(D_e, \leq)$ е частично наредено множество. Операцията $\oplus$ отново върши работа като точна горна граница на две степени. Ще докажем твърдение, аналогично на Твърдение 3.4:

Твърдение 10.4. *$d_e(A \oplus B)$ е точна горна граница на $d_e(A)$ и $d_e(B)$.*

Доказателство. Ще докажем съответното твърдение за множества.

(1) $x \in A \iff 2x \in A \oplus B \Rightarrow A \leq_m A \oplus B \Rightarrow A \leq_T A \oplus B \Rightarrow A \leq_e A \oplus B$. Аналогично $x \in B \iff 2x+1 \in A \oplus B \Rightarrow B \leq_m A \oplus B \Rightarrow B \leq_T A \oplus B \Rightarrow B \leq_e A \oplus B$, т.е. $A \oplus B$ е горна граница на A и B.

(2) Нека $A \leq_e C, B \leq_e C$, по-точно $A = W'(C), B = W''(C)$. Нека:

$$W = \{\langle x, v\rangle \mid (\exists v')(\langle x, v'\rangle \in W') \,\&(\exists v'')(\langle x, v''\rangle \in W'') \,\&\, D_v = D_{v'} \oplus D_{v''}\}\,.$$

Очевидно W е полуразрешимо. Освен това се вижда, че $W(C) = A \oplus B$, т.е. $C \leq_e A \oplus B$. Така $A \oplus B$ е точна горна граница на A и B.

$\square$

Ако означим $0_e = \{W \mid W \text{ е полуразрешимо}\}$, $0_e \leq a$ за произволна номерационна степен a. Наистина, ако $V \in 0_e$ е полуразрешимо, то за полуразрешимото $W = \{\langle x, v\rangle \mid x \in V \,\&\, D_v = \emptyset\}$ имаме $W(A) = V$ за произволно A, т.е. $V \leq_e A$.

Така получихме, че $D_e = (D_e, 0_e, \oplus, \leq)$ е горна полурешетка.

Дефиниция 10.5. Казваме, че $A \subseteq \mathbb{N}$ е *тотално*, ако $A \equiv_e A \oplus \overline{A} = A^+$.

Ще докажем някои свойства на тоталните множества.

Твърдение 10.6. *$A^{+^+} \equiv_e A^+$, т.е. A^+ е тотално.*

Доказателство. Имаме

$$2x \in \overline{A^+} \iff x \notin A \iff x \in \overline{A} \iff 2x+1 \in A^+,$$
$$2x+1 \in \overline{A^+} \iff x \notin \overline{A} \iff x \in A \iff 2x \in A^+.$$

Тогава $\overline{A^+} = \overline{A} \oplus A \equiv_e A \oplus \overline{A} = A^+$. Следователно $A^{+^+} = A^+ \oplus \overline{A^+} \equiv_e A^+$. □

Твърдение 10.7. *$A^+ \equiv_e \langle \chi_A \rangle$.*

Доказателство. Нека

$$W_1 = \{\langle 2x, v\rangle \mid D_v = \{\langle 2x, 0\rangle\}\} \cup \{\langle 2x+1, v\rangle \mid D_v = \{\langle 2x+1, 1\rangle\}\}$$
$$W_2 = \{\langle \langle x, 0\rangle, v\rangle \mid D_v = \{2x\}\} \cup \{\langle \langle x, 1\rangle, v\rangle \mid D_v = \{2x+1\}\}$$

Вижда се, че $A^+ = W_1(\langle \chi_A \rangle), \langle \chi_A \rangle = W_2(A^+)$. □

Твърдение 10.8. *Следните условия са еквивалентни:*

(1) *A е тотално;*
(2) *$\overline{A} \leq_e A$;*
(3) *$A \equiv_e \langle \chi_A \rangle$.*

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad A \equiv_e A^+ \geq_e \overline{A}$.
(2) $\Rightarrow$ (3) $\quad \overline{A} \leq_e A \Rightarrow (\exists W$ - полуразрешимо$)(W(A) = \overline{A})$. Множествата

$$W_1 = \{\langle x, v\rangle \mid D_v = \{\langle x, 0\rangle\}\},$$
$$W_2 = \{\langle \langle x, 0\rangle, v\rangle \mid D_v = \{x\}\} \cup \{\langle \langle x, 0\rangle, 1\rangle \mid \langle v, x\rangle \in W\}$$

са полуразрешими и освен това $A = W_1(\langle \chi_A \rangle), \langle \chi_A \rangle = W_2(A)$.
(3) $\Rightarrow$ (1) $\quad A^+ \equiv_e \langle \chi_A \rangle \equiv_e A$. □

Твърдение 10.9. *Ако f е тотална, то $\langle f \rangle$ е тотално.*

Доказателство. Имаме, че

$$\langle x, y\rangle \in \overline{\langle f \rangle} \iff (\exists z)(f(x) \simeq z \,\&\, z \neq y)$$
$$\iff (\exists z)(\langle x, z\rangle \in \langle f \rangle \,\&\, z \neq y),$$

т.е. $\overline{\langle f \rangle} \leq_e \langle f \rangle \Rightarrow \langle f \rangle \equiv_e \langle f \rangle^+$, откъдето $\langle f \rangle$ е тотално. □

Пример за тотално множество е всяко разрешимо множество A, понеже тогава $A \equiv_e \overline{A} \equiv_e A \oplus \overline{A}$ като полуразрешими. Има множества, които не са тотални - например K, понеже $\overline{K} \not\leq_e K$.

Дефиниция 10.10. Казваме, че $a \in D_e$ е *тотална*, ако съществува тотално $A \in a$.

Забележка. Не е задължително всички множества от една тотална степен да са тотални. Например 0_e е тотална, понеже съдържа всички разрешими множества, но $K \in 0_e$ не е тотално.

Оказва се, че сводимостта по номеруемост е достатъчно изразителна, за да опише Тюринговата сводимост и рекурсивната номеруемост.

Твърдение 10.11. $A \leq_T B \iff A^+ \leq_e B^+$.

Доказателство.

$$\begin{aligned} A \leq_T B &\iff \chi_A \leq_T \chi_B \\ &\iff \chi_A \leq_e \chi_B && (\chi_B \text{ е тотална, Следствие 9.15}) \\ &\iff A^+ \leq_e B^+ && (A^+ \equiv_e \langle \chi_A \rangle, B^+ \equiv_e \langle \chi_B \rangle). \end{aligned}$$

□

Твърдение 10.12. $A \leq_{r.e.} B \iff A \leq_e B^+$.

Доказателство. $A \leq_{r.e.} B \iff c_A \leq_T \chi_B \iff A \leq_e B^+$. □

Проблемът да се определят тоталните степени в D_e и дали това е възможно е отворен. Оказва се, обаче че ако разгледаме тоталните степени в D_e, то те образуват горна полурешетка, изоморфна на D_T.

Дефиниция 10.13. $\varkappa : D_T \xrightarrow{\text{в}} D_e$ наричаме *Роджърсов изоморфизъм*, когато

$$\varkappa(d_T(A)) = d_e(A^+).$$

Свойства:

(1) (коректност) $A \equiv_T B \iff A^+ \equiv_e B^+$;
(2) $range(\varkappa) = Tot = \{a \mid a \text{ е тотална степен}\}$. Наистина, ако $A \in a \in Tot$ е тотално, то понеже $A \equiv_e A^+$ имаме, че $A^+ \in a \Rightarrow \varkappa(d_T(A)) = a$ и следователно $a \in Range(\varkappa)$. Обратно, ако $a \in Range(\varkappa)$, то $a = d_e(A^+) \Rightarrow a \in Tot$.
(3) (обратимост) Нека $\varkappa(d_T(A)) = \varkappa(d_T(B)) \Rightarrow A^+ \equiv_e B^+ \Rightarrow A \equiv_T B \Rightarrow d_T(A) = d_T(B)$.
(4) (изоморфизъм) $A \leq_T B \Rightarrow \varkappa(d_T(A)) = A^+ \leq_e B^+ = \varkappa(d_T(B))$.

Получихме, че $\varkappa$ е изоморфно влагане на D_T в тоталните степени на D_e. За да видим, че $Range(\varkappa) = Tot \subsetneq D_e$, трябва да покажем, че има нетотални степени. Доказателството ще извършим с форсинг.

Дефиниция 10.14. Ще казваме, че

$$\begin{aligned} A \models_e F_a(x,y) &\iff \langle x,y \rangle \in W_a(A), \\ \alpha \Vdash_e F_a(x,y) &\iff \langle x,y \rangle \in W_a(\alpha^+), \text{ където } \alpha^+ = \{x \mid \alpha(x) \simeq 0\}. \end{aligned}$$

Свойства на форсинга:

(1) $\alpha \subseteq A \,\&\, \alpha \Vdash_e F_a(x,y) \Rightarrow A \models_e F_a(x,y)$ поради монотонността на е-операторите.
(2) $\alpha \subseteq \beta \,\&\, \alpha \Vdash_e F_a(x,y) \Rightarrow \beta \Vdash_e F_a(x,y)$, понеже $\alpha^+ \subseteq \beta^+$;
(3) $A \models_e F_a(x,y) \Rightarrow (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash_e F_a(x,y))$ поради компактността на е-операторите.

Твърдение 10.15. *Нека A е генерично множество и $\varphi \leq_e A$. Тогава съществува изчислима функция ψ, такава че $\varphi \subseteq \psi$.*

Доказателство. Нека A е генерично и $\varphi \leq_e A$. Нека $\langle \varphi \rangle = W_a(A)$. Тогава $\langle x,y \rangle \in \langle \varphi \rangle \iff A \models_e F_a(x,y)$. Нека

$$S = \{\alpha \mid (\exists x)(\exists y_1)(\exists y_2)(\alpha \Vdash_e F_a(x,y_1) \,\&\, \alpha \Vdash_e F_a(x,y_2) \,\&\, y_1 \neq y_2)\}.$$

Тъй като форсингът $\Vdash_e$ е полуразрешим, то S е полуразрешимо. Поради генеричността на A знаем, че $(\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S))$. Да допуснем, че $\alpha \in S$. Тогава за $y_1 \neq y_2$, $A \models_e F_a(x, y_1), A \models_e F_a(x, y_2)$, т.е. $\varphi(x) \simeq y_1, \varphi(x) \simeq y_2 \neq y_1$ - противоречие!

Получихме, че $(\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S)$. Нека

$$\psi(x) \simeq y \iff (\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash_e F_a(x, y)).$$

Трябва да докажем, че ψ е функция. Нека $\psi(x) \simeq y_1, \psi(x) \simeq y_2$. Тогава $(\exists \beta_1 \supseteq \alpha)(\beta_1 \Vdash_e F_a(x, y_1)), (\exists \beta_2 \supseteq \alpha)(\beta_2 \Vdash_e F_a(x, y_2))$. Да допуснем, че $y_1 \neq y_2$. ще комбинираме β_1 и β_2 по следния начин:

$$\beta(n) \simeq \begin{cases} \alpha(n) & \text{, ако } n < |\alpha|\,; \\ 0 & \text{, ако } |\alpha| < n < max(|\beta_1|\,, |\beta_2|); \\ \neg ! & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Очевидно имаме, че $\beta \supseteq \alpha, \beta^+ \supseteq \beta_1^+, \beta^+ \supseteq \beta_2^+$. Тогава от една страна $\beta \notin S$, а от друга $\beta \Vdash_e F_a(x, y_1), \beta \Vdash_e F_a(x, y_2), y_1 \neq y_2$, което е противоречие.

Така получихме, че ψ е функция и по дефиниция G_ψ е полуразрешима, т.е. ψ е изчислима.

Нека $\varphi(x) \simeq y$. Тогава

$$A \models_e F_a(x, y) \Rightarrow (\exists \beta \subseteq A)(\beta \Vdash_e F_a(x, y)) \Rightarrow (\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash_e F_a(x, y)) \Rightarrow \psi(x) \simeq y.$$

Получихме, че $\varphi \subseteq \psi$. □

Следствие 10.16. *$d_e(A)$ не е тотална степен за A - генерично.*

Доказателство. Допускаме, че $d_e(A)$ е тотална. Тогава

$$(\exists X \in d_e(A))(X \text{ - тотално}).$$

Оттук следва, че $\langle \chi_X \rangle \equiv_e X \in d_e(A)$, откъдето $\langle \chi_X \rangle \leq_e A$. От твърдението следва, че има изчислима $\psi \supseteq \chi_X$, но χ_X е тотална, следователно е изчислима. Оттук следва, че X е разрешимо. От друга страна $A \leq_e X$, т.е. A е полуразрешимо, което е невъзможно, понеже A е генерично. □

Следствие 10.17. *Ако A е генерично, X е тотално, $X \leq_e A$, то $X \leq_e \emptyset$.*

ТЕМА 11

Регулярни номерации. Теорема на Зелман

Дефиниция 11.1. Множеството A наричаме *квазиминимално*, ако:

(1) $A \not\leq_e \emptyset$;
(2) Ако $X \leq_e A$ и X е тотално, то $X \leq_e \emptyset$.

От Следствие 10.17 следва, че всяко генерично множество е квазиминимално.

Дефиниция 11.2. Множеството A наричаме *минималоподобно* относно B, ако:

(1) $B \lneq_e A \oplus B$;
(2) Ако $\varphi \leq_e A \oplus B$, то $(\exists \psi \subseteq \phi)(\psi \leq_e B)$.

За да докажем съществуването на минималоподобни множества се налага да релативизираме понятието генеричност.

Дефиниция 11.3. Казваме, че A е B-генерично множество, ако за всяко множетсво $S \leq_e B$ от крайни части е в сила, че:

$$(\exists \alpha \subseteq A) \underbrace{(\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S))}_{\alpha \text{ разрешава } S}.$$

Можем да строим B-генерични множества със същата конструкция, както строим генерични множества в Тема 5, с разликата, че полагаме $S_e = String \cap W_e(B)$. За B-генеричност имаме релативизираните свойства на генерично множество:

Твърдение 11.4. *Ако A е B-генерично, то A не е крайно.*

Доказателство. Доказва се аналогично на Твърдение 5.3, като вземем предвид, че полуразрешимосто $S \leq_e B$. □

Твърдение 11.5. *Ако A е B-генерично, $V \subseteq A, V \leq_e B$, то V е крайно.*

Доказателство. Доказва се аналогично на Твърдение 5.4, като вземем предвид, че множеството $S = \{\alpha \mid \exists x(\alpha(x) \simeq 1 \,\&\, x \in V)\} \leq_e V \leq_e B$. □

Следствие 11.6. *$A \not\leq_e B$, понеже $A \subseteq A$ е безкрайно.*

Следствие 11.7. *$B \lneq_e A \oplus B$, понеже иначе $A \leq_e A \oplus B \equiv_e B$.*

Ще въведем съответните релативизирани понятия за форсинг и моделиране:

Дефиниция 11.8. Казваме, че A *B-моделира* твърдението $F_e(x, y)$:

$$A \models_B F_e(x, y) \iff !\,\{e\}^A(x) \iff \langle x, y \rangle \in W_e(A \oplus B).$$

Дефиниция 11.9. Казваме, че крайната част α *B-форсира* твърдението $F_e(x,y)$:

$$\alpha \Vdash_B F_e(x,y) \iff \langle x,y\rangle \in W_e(\alpha^+ \oplus B),$$

където $\alpha^+ = \{x \mid \alpha(x) \simeq 0\}$.

Свойства на форсинга:

(1) $\alpha^+ \subseteq A \,\&\, \alpha \Vdash_B F_e(x,y) \Rightarrow A \models_B F_e(x,y)$ - от монотонност на операцията $\oplus$ и е-операторите.
(2) $\alpha \subseteq \beta \,\&\, \alpha \Vdash_B F_e(x,y) \Rightarrow \beta \Vdash_B F_e(x,y)$ - от монотонност на операцията $\oplus$ и е-операторите и факта, че $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^+ \subseteq \beta^+$.
(3) $A \models_B F_e(x,y) \Rightarrow (\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \Vdash_B F_e(x,y))$ - следва от компактност на е-операторите.

Лема 11.10. *Множеството* $\{(\alpha,e,x,y) \mid \alpha \Vdash_B F_e(x,y)\} \leq_e B$.

Доказателство.

$$\alpha \Vdash_B F_e(x,y) \iff (\exists v)(\langle\langle x,y\rangle, v\rangle \in W_e \,\&\, D_v \subseteq \alpha^+ \oplus B) \leq_e B.$$

□

Твърдение 11.11. *Ако A е B-генерично, то A е минималоподобно относно B.*

Доказателство. Твърдението е релативизация на Твърдение 10.15 за генерични множества.

От Следствие 11.7 получаваме, че $B \lneq_e A \oplus B$. Нека сега $\langle\varphi\rangle \leq_e A \oplus B$. Тогава $\langle\varphi\rangle = W_e(A \oplus B)$ и $\langle x,y\rangle \in \langle\varphi\rangle \iff A \models_B F_e(x,y)$. Нека

$$S = \{\alpha \mid (\exists x)(\exists y_1)(\exists y_2)(\alpha \Vdash_B F_e(x,y_1) \,\&\, \alpha \Vdash_B F_e(x,y_2) \,\&\, y_1 \neq y_2)\}.$$

От Лема 11.10 следва, че $S \leq_e B$. Тогава от B-генеричността на A знаем, че $(\exists \alpha \subseteq A)(\alpha \in S \vee (\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S))$. Да допуснем, че $\alpha \in S$. Тогава за $y_1 \neq y_2$, $A \models_B F_e(x,y_1), A \models_B F_e(x,y_2)$, т.е. $\varphi(x) \simeq y_1, \varphi(x) \simeq y_2 \neq y_1$ - противоречие!

Получихме, че $(\forall \beta \supseteq \alpha)(\beta \notin S)$. Нека

$$\psi(x) \simeq y \iff (\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash_B F_e(x,y)).$$

Дефиницията е коректна поради монотонноста на $\Vdash_B$. Фактът, че ψ е функция се проверява както в твърдение 10.15.

Така получихме, че ψ е функция и по дефиниция $\langle\psi\rangle \leq_e B$.

Нека $\varphi(x) \simeq y$. Тогава

$$A \models_B F_e(x,y) \Rightarrow (\exists \beta \subseteq A)(\beta \Vdash_B F_e(x,y)) \Rightarrow (\exists \beta \supseteq \alpha)(\beta \Vdash_B F_e(x,y)) \Rightarrow \psi(x) \simeq y.$$

Получихме, че $\varphi \subseteq \psi$. □

Следствие 11.12. *Ако A е B-генерично, X е тотално, $X \leq_e A \oplus B$, то $X \leq_e B$.*

Доказателство. Това е релативизация на Следствие 10.17 и се доказва аналогично. □

Една еквивалентна дефиниция на номерационна сводимост е дадена от Роджърс.

Дефиниция 11.13. $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{върху}} B$ наричаме *номерация* на B.

Роджърс предлага да се казва, че A се свежда по номеруемост към B, ако по всяка номерация на B можем да номерираме A. Така дадената дефиниция обаче е неточна, защото номерацията може въобще да не е изчислима функция. По правилно би било да се казва, че имаме алгоритъм, който по всяка програма, която използва като оракул номерацията f на B за да номерира рекурсивно B, намира друга програма с оракул f, която рекурсивно номерира A. За формализиране на тази дефиниция се въвеждат равномерните оператори.

Дефиниция 11.14. Казваме, че операторът $\Gamma : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ е *равномерен*, ако съществува изчислима функция γ, такава че

$$(\forall f \in \mathcal{F})(\forall a)(\Gamma(W_a^f) = W_{\gamma(a)}^f),$$

Ще докажем еквивалентсност на двете дефиниции, като докажем, че равномерните оператори са точно е-операторите:

Твърдение 11.15. *Γ е равномерен $\iff$ Γ е е-оператор.*

Доказателство. ($\Leftarrow$) Нека Γ се определя с полуразрешимото W. Тогава

$$\Gamma(W_a^f) = \left\{x \mid (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W \,\&\, D_v \subseteq W_a^f)\right\}.$$

Търсим изчислима $\lambda(a)$, така че $!\varphi_{\lambda(a)}^f(v) \iff D_v \subseteq W_a^f$. Нека

$$\psi(a, v) \simeq \prod_{u \in D_v} \{a\}^f(u).$$

Ясно е, че $f \geq_T \psi = \{b\}^f$. Ако положим $\lambda(v) = S_1^1(b, a)$, то имаме

$$v \in W_{\lambda(a)}^f \iff !\psi(a, v) \iff D_v \subseteq W_a^f.$$

Тогава ако $V = \left\{(a, x) \mid (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W \,\&\, v \in W_{\lambda(a)}^f)\right\}$, то $f \geq_T c_V = \varphi_c^f$, откъдето за $\mu(a) = S_1^1(c, a)$ получаваме, че $\Gamma(W_a^f) = W_{\mu(a)}^f$.

($\Rightarrow$) Нека γ е такава, че $\Gamma(W_a^f) = W_{\gamma(a)}^f$. Ще докажем, че Γ е е-оператор, като разгледаме действието му върху специален клас от оракули.

Дефиниция 11.16. Казваме, че тоталната $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ е *регулярна номерация* на B, ако $f(2\mathbb{N} + 1) = B$.

Забележка. В случай, че $B = \emptyset$, ще разглеждаме регулярни номерации на $\mathbb{N} = \overline{\emptyset} \equiv_e \emptyset$.

Ако f е регулярна номерация, то

$$c_B(x) \simeq sg(\mu n[x = f(2n + 1)]).$$

Вижда се, че $c_B \leq_T f$, т.е. има програма b, така че за произволна регулярна номерация $W_b^f = B$. Нека $\gamma(b) = a$. Тогава $\Gamma(B) = W_a^f$. Нека

$$W_{a'} = \left\{\langle x, v\rangle \mid x \in W_a^{\rangle D_v \langle}\right\}, \text{ където } \rangle D \langle\,(x) \simeq \mu y\,[\langle x, y\rangle \in D]\,.$$

Вижда се, че $W_{a'}$ е полуразрешимо и $\Gamma(B) = \Gamma(W_b^f) = W_a^f = W_{a'}(\langle f\rangle)$.

Дефиниция 11.17. *B-регулярна крайна част* наричаме функция $\tau : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N}$, такава че

$$2x + 1 \in dom(\tau) \Rightarrow \tau(2x + 1) \in B.$$

Ако τ е B-регулярна крайна част, то очевидно

$$(\exists f \supseteq \tau)(f \text{ е регулярна номерация на } B).$$

Имаме

$$\begin{aligned} x \in \Gamma(B) &\iff x \in W_{a'}(\langle f \rangle) \\ &\iff (\exists \tau \text{ - } B\text{-регулярна крайна част})(x \in W_{a'}(\langle \tau \rangle)) \\ &\iff (\exists \tau \text{ - крайна част})(\tau^* \subseteq B \,\&\, \\ &\qquad dom(\tau) = [0; 2q+1] \,\&\, x \in W_{a'}(\langle \tau \rangle)), \text{ където} \\ &\qquad \tau^* = \{\tau(2x+1) \mid 2x+1 \in dom(\tau)\}. \end{aligned}$$

От последното равенство се вижда, че Γ е е-оператор, както и че проверката дали τ е B-регулярна крайна част е $\leq_e B$. □

Следствие 11.18. *За всяка B-регулярна номерация f имаме, че $B \leq_e f$, понеже $B = W_b^f$ и тогава множеството $W_{b'} = \left\{\langle x, v \rangle \mid x \in W_b^{\rangle D_v \langle}\right\}$ свежда B към $\langle f \rangle$.*

Можем да въведем понятия за моделиране и форсинг за регулярни номерации на B и B-регулярни крайни части:

Дефиниция 11.19.

$$\begin{aligned} f \models F_e(x) &\iff x \in W_e(\langle f \rangle), \\ \tau \Vdash F_e(x) &\iff x \in W_e(\langle \tau \rangle). \end{aligned}$$

Имаме:

$$\tau \Vdash F_e(x) \iff (\exists v)(\langle x, v \rangle \in W_e \,\&\, D_v \subseteq \langle \tau \rangle),$$

откъдето множеството $S_\tau = \{\langle e, x \rangle \mid \tau \Vdash F_e(x)\}$ е полуразрешимо.

Свойства на форсинга:

(1) $\tau \subseteq f \,\&\, \tau \Vdash F_e(x) \Rightarrow f \models F_e(x)$ - от монотонност на е-операторите.
(2) $\tau \subseteq \rho \,\&\, \tau \Vdash F_e(x) \Rightarrow \rho \Vdash F_e(x)$ - от монотонност на е-операторите.
(3) $f \models F_e(x) \Rightarrow (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x))$ - от компактност на е-операторите.

Твърдение 11.20. *Нека $A \not\leq_e B$. Тогава съществува регулярна номерация f на B, така че $A \not\leq_e f$.*

Доказателство. Ще строим монотонно растяща редица от регулярни крайни части:

$$\tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \cdots \subseteq \tau_q \subseteq \ldots$$

Нека $\tau_0(0) = 0, \tau_0(1) = z_0 \in B$. Нека сме построили τ_q.

I сл. $q = 2e$ е четно. Нека z_0 е най-малкият неномериран елемент на B, т.е. $z_0 = \mu z[z \in B \,\&\, z \notin \tau_q(2\mathbb{N}+1)]$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * 0 * z_0$.

II сл. $q = 2e+1$ е нечетно. Да разгледаме множеството

$$\begin{aligned} C = \{x \mid (\exists \rho \supseteq \tau_q)(&\rho \text{ е } B\text{-регулярна крайна част} \,\&\, \\ &\rho(|\tau_q|) = x \,\&\, \rho \Vdash F_e(|\tau_q|))\}. \end{aligned}$$

Тъй като $C \leq_e B$, то $C \neq A$.

II.1) $(\exists x)(x \in C \,\&\, x \notin A)$. Тогава полагаме τ_{q+1} да бъде най-малкото ρ, което удовлетворява условието на C.

II.2) $(\exists x)(x \notin C \,\&\, x \in A)$. Тогава полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * x * z_0$ за някое $z_0 \in B$.

Нека $f = \bigcup_q \tau_q$ - очевидно е регулярна номерация на B. Да допуснем, че $A \leq_e f$, т.е. $A = W_e(\langle f \rangle)$. Тогава $f^{-1}(A) = \{x \mid f(x) \in A\} \leq_e f$ и има e, така че $n \in f^{-1}(A) \iff f \models F_e(n)$. Да разгледаме стъпка $q = 2e+1$. Нека $n = |\tau_q| = 2q+1$.

I сл. $n \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(n) \in A \Rightarrow (\exists \rho \supseteq \tau_q)(\rho \Vdash F_e(n) \,\&\, \rho(n) = f(n) \in A)$. Тогава $f(n) \in C \cap A$, което е противоречие.

II сл. $n \notin f^{-1}(A) \Rightarrow f(n) \notin A \Rightarrow (\forall \rho \supseteq \tau_q)(\rho \nVdash F_e(n) \,\&\, \rho(n) = f(n) \notin A)$, което означава, че $f(n) \notin C$ - отново противоречие.

Тогава допускането ни е грешно, т.е. $A \nleq_e f$. □

Теорема 11.21 (Зелман).

$$A \leq_e B \iff (\forall X \text{ - \textit{тотално}})(B \leq_e X \Rightarrow A \leq_e X).$$

Доказателство. $(\Rightarrow)$ Очевидно от транзитивност на $\leq_e$.

$(\Leftarrow)$ Да допуснем, че $A \nleq_e B$. Тогава можем да построим B-регулярна номерация f, такава че $A \nleq_e \langle f \rangle$, но $\langle f \rangle$ е тотално и $B \leq_e \langle f \rangle$, което е противоречие. □

Следствие 11.22. *Ако $a, b \in D_e$, тогава*

$$a \leq b \iff (\forall x \text{ - \textit{тотална степен}})(b \leq x \Rightarrow a \leq x).$$

Дефиниция 11.23. *Автоморфизъм* на D_e наричаме всеки изоморфизъм $\varkappa : D_e \xrightarrow{\text{върху}} D_e$ ($\varkappa : D_e \cong D_e$).

Казваме, че $\varkappa$ е *тривиален*, ако $(\forall a)(\varkappa(a) = a)$.

Дефиниция 11.24. Казваме, че $D \subseteq D_e$ е *базис* за автоморфизмите в D_e, ако всеки път, когато $\varkappa : D_e \cong D_e$ и $(\forall d \in D)(\varkappa(d) = d)$, то $\varkappa$ е тривиален.

Теорема 11.25 (за базиса). *Множеството на тоталните е-степени е базис на автоморфизмите на D_e.*

Доказателство. Нека $\varkappa$ е автоморфизъм на D_e запазващ всички тотални степени. Нека a е нетотална степен.

(1) $a \leq \varkappa(a)$. Наистина, нека b е тотална степен, такава че $\varkappa(a) \leq b$. Но $b \equiv \varkappa(b) \Rightarrow \varkappa(a) \leq \varkappa(b) \iff a \leq b$. Тогава по Следствие 11.22 $a \leq \varkappa(a)$.
(2) $\varkappa(a) \leq a$ - доказва се аналогично.

Така $\varkappa(a) = a$ и следователно $\varkappa$ е тривиален. □

ТЕМА 12

Частични регулярни номерации

Дефиниция 12.1. $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ наричаме *частична регулярна номерация* на B, ако

$$B = \{x \mid (\exists n)(f(2n+1) \simeq x)\}\,.$$

Дефиниция 12.2. Казваме, че $\tau : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\bot\}$ е *частична B-регулярна крайна част*, ако:

$$2n+1 \in dom(\tau)\,\&\,\tau(2n+1) \neq \bot \Rightarrow \tau(2n+1) \in B.$$

Дефиниция 12.3. Казваме, че $\tau \subseteq f$, ако:

$$(\forall x \in dom(\tau))(\tau(x) \neq \bot \Rightarrow \tau(x) \simeq f(x)\,\&\,\tau(x) = \bot \Rightarrow \neg!f(x)).$$

Очевидно $B \leq_e f$ за всяка частична регулярна номерация на B, понеже за $W = \{\langle x, v\rangle \mid D_v = \{\langle 2n+1, x\rangle\}\}$ е вярно, че $W(\langle f\rangle) = B$. Освен това проверката дали една крайна част τ е B-регулярна е $\leq_e B$.

Дефиниция 12.4. Казваме, че f е *генерична частична регулярна номерация на B*, ако f е частична регулярна номерация на B и за всяко $S \leq_e B$, което се състои от частични B-регулярни крайни части

$$(\exists \tau \subseteq f)(\tau \in S \vee (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S)).$$

Всички твърдения за генеричносттта са в сила и за генеричните частични регулярни номерации. Нека f е някоя генерична частична регулярна номерация на B.

Твърдение 12.5. *f не е крайна.*

Доказателство. Допускаме, че $dom(f) \subseteq [0; n]$. Нека

$$S = \{\tau \mid \tau \text{ е частична } B\text{-регулярна крайна част}\,\&(\exists m > n)(!\tau(m)\,\&\,\tau(m) \neq \bot)\}\,.$$

Очевидно $S \leq_e B$. От генеричността на f следва, че има $\tau \subseteq f$, така че $\tau \in S \vee (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S)$. Очевидно $\tau \notin S$, понеже $\tau \subseteq f \Rightarrow |\tau| \leq n$. Тогава $(\forall \rho \supseteq \tau)(\forall m > n)(!\rho(m) \Rightarrow \rho(m) = \bot)$, което е невъзможно. Получихме противоречие с допускането, т.е. f е безкрайна. □

Твърдение 12.6. *Ако $f \subseteq \psi \leq_e B$, то ψ е крайна.*

Доказателство. Нека

$$S = \{\tau \mid (\exists x)(\tau \text{ е частична } B\text{-регулярна крайна част}\,\&!\tau(x) \neq \bot\,\&!\psi(x) \neq \tau(x))\}$$

Очевидно $S \leq_e B$. От генеричността на f следва, че има τ, така че $\tau \in S \vee (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S)$. Вижда се, че $\tau \notin S$, понеже иначе $\tau \nsubseteq \psi$, а имаме $\tau \subseteq f \subseteq \psi$. Тогава $(\forall \rho \supseteq \tau)(\forall x)(!\psi(x)\,\&\,\rho(x) \neq \bot \Rightarrow \psi(x) = \rho(x))$. Това е възможно само ако $dom(\psi) \subseteq dom(\tau)$, т.е. ψ е крайна. □

СЛЕДСТВИЕ 12.7. *f няма продължение, което е $\leq_e B$, понеже f не е крайна.*

ТВЪРДЕНИЕ 12.8. *Множеството $dom(f)$ е B-генерично.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Да допуснем, че $dom(f)$ не е B-генерично. По дефиниция това означава, че съществува множество S от крайни части, такова че $S \leq_e B$ и: $(\forall \alpha \subseteq dom(f))(\alpha \notin S \,\&\, (\exists \beta_\alpha \supseteq \alpha)(\beta_\alpha \in S))$. Нека за произволна частична B-регулярна крайна част ρ дефинираме крайната част

$$\rho^+(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, ако } !\rho(x) \neq \bot \\ 1 & \text{, ако } !\rho(x) = \bot \\ \neg ! & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Очевидно е, че $\rho^+ \subseteq dom(\rho)$. Освен това, ако $\rho \subseteq f$, то $\rho^+ \subseteq dom(f)$. Да разгледаме множеството

$$S' = \left\{\rho \mid \rho^+ \in S \,\&\, \rho \text{ е частична } B\text{- регулярна крайна част}\right\}.$$

От дефиницията на S' следва, че $S' \leq_e S \oplus B$, но $S \leq_e B$, откъдето $S' \leq_e B \equiv_e S \oplus B$. Тъй като f е генерична, то има частична B-регулярна крайна част $\tau \subseteq f$, такава че $\tau \in S' \vee (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S')$.

Ако допуснем, че $\tau \in S'$, то $\tau^+ \in S$, но понеже $\tau^+ \subseteq dom(f)$ поради избора на S имаме $\tau^+ \notin S$, което е противоречие. Тогава остава само възможността $(\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S')$.

Да разгледаме крайната част $\beta_{\tau^+} \in S$. Тогава за произволна частична B-регулярна крайна част $\rho \supseteq \tau$, такава че $\rho^+ = \beta_{\tau^+}$, имаме $\rho^+ \in S$, откъдето $\rho \in S'$, което е противоречие. Това доказва, че допускането ни е грешно, т.е. $dom(f)$ е B-генерично множество. □

СЛЕДСТВИЕ 12.9. *$dom(f) \lneq_e f$.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Да допуснем противното, т.е.

$$f \leq_e dom(f) \leq_e dom(f) \oplus B,$$

но f няма продължение $\leq_e B$, докато $dom(f)$ е B-генерично и следователно минималоподобно относно B, т.е. има $g \supseteq f$, така че $g \leq_e B$ - противоречие. □

Можем да въведем понятия за моделиране и форсинг за частични регулярни номерации на B и частични B-регулярни крайни части:

ДЕФИНИЦИЯ 12.10.

$$f \models F_e(x) \iff x \in W_e(\langle f \rangle),$$
$$\tau \Vdash F_e(x) \iff x \in W_e(\tau^+), \text{ където } \tau^+ = \{\langle x, y\rangle \mid y \in \mathbb{N} \,\&\, \tau(x) \simeq y\}.$$

Имаме:

$$\tau \Vdash F_e(x) \iff (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W_e \,\&\, D_v \subseteq \tau^+),$$

откъдето множеството $S_\tau = \{\langle e, x\rangle \mid \tau \Vdash F_e(x)\}$ е полуразрешимо.

Свойства на форсинга:

(1) $\tau \subseteq f \,\&\, \tau \Vdash F_e(x) \Rightarrow f \models F_e(x)$ - от монотонност на е-операторите и факта, че $\tau \subseteq f \Rightarrow \tau^+ \subseteq \langle f \rangle$.
(2) $\tau \subseteq \rho \,\&\, \tau \Vdash F_e(x) \Rightarrow \rho \Vdash F_e(x)$ - от монотонност на е-операторите и факта, че $\tau \subseteq \rho \Rightarrow \tau^+ \subseteq \rho^+$.

(3) $f \models F_e(x) \Rightarrow (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x))$ - от компактност на e-операторите.

Твърдение 12.11. *Нека $A \nleq_e B$. Тогава съществува f генерична частична регулярна номерация на B, такава че $A \nleq_e f$.*

Доказателство. Ще построим монотонно растяща редица от частични B-регулярни крайни части $\tau_q : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$. Нека $\tau_0(0) = \perp, \tau_0(1) = b_0 \in B$. Нека сме построили τ_q.

I сл. $q = 3e$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * \perp * b$, където b е първият неномериран елемент на B.

II сл. $q = 3e+1$. Ще осигурим генеричност на f. Нека $S_e = W_e(B) \cap R_B$, където $R_B = \{\tau \mid \tau \text{ е частична B-регулярна крайна част}\}$. Полагаме τ_{q+1} да бъде най-малкото $\tau \supseteq \tau_q$, $\tau \in S_e$, ако такова има. Ако няма - полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q$.

III сл. $q = 3e+2$. Ще осигурим, че $A \nleq_e f$, като сме сигурни, че $f^{-1}(A) \neq W_e(\langle f \rangle)$. Тогава ще имаме $f^{-1}(A) \nleq_e f$ и оттам $A \nleq_e f$.

Нека

$$n_q = |\tau_q|$$
$$C_q = \{x \mid (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\underbrace{\tau \text{ е част. } B\text{-рег. крайна част}}_{\leq_e B}) \,\&\, \underbrace{\tau(n_q) \simeq x}_{\text{ефективно}} \,\&\, \underbrace{\tau \Vdash F_e(n_q)}_{\text{ефективно}}\}$$

Очевидно $C_q \leq_e B$ и следователно $C_q \neq A$.

III.1) $(\exists x)(x \in C_q \,\&\, x \notin A)$. Тогава избираме най-малкото такова x и полагаме τ_{q+1} да е най-малкото му съответно τ.

III.2) $(\exists x)(x \notin C_q \,\&\, x \in A)$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * x * \perp$.

Нека дефинираме f по следния начин:

$$f(n) \simeq x \iff (\exists q)(\tau_q(n) \simeq x)$$

Осигурили сме f да е генерична частична регулярна номерация на B по дефиниция. Остава да докажем, че $f^{-1}(A) \nleq_e f$.

Да допуснем, че $f^{-1}(A) \equiv_e W_e(\langle f \rangle)$. Да разгледаме стъпка $q = 3e+2$. Знаем, че $f(n_q) \simeq x \in A \triangle C$.

I сл. $x \in C_q \,\&\, x \notin A$. Тогава

$$f \models F_e(n_q) \Rightarrow n_q \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(n_q) = x \in A \text{ - противоречие.}$$

II сл. $x \notin C_q \,\&\, x \in A$. Тогава

$$n_q \in f^{-1}(A) \Rightarrow (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\tau(n_q) \simeq x \,\&\, \tau \Vdash F_e(n_q)) \Rightarrow x \in C_q \text{ - противоречие.}$$

Тогава $f^{-1}(A) \nleq_e f \Rightarrow A \nleq_e f$.

□

Можем да релативизираме дефиницията за квазиминимално множество по следния начин:

Дефиниция 12.12. Множеството A наричаме *квазиминимално над B*, ако:

(1) $B \lneq_e A$;
(2) Ако $X \leq_e A$ и X е тотално, то $X \leq_e B$.

Ролята на генеричните множества, които са квазиминимални тук играят генеричните частични регулярни номерации на B, които са квазиминимални над B.

Дефиниция 12.13.

$$f \models F_e(x,y) \iff \langle x,y\rangle \in W_e(\langle f\rangle) \iff f \models F_e(\langle x,y\rangle),$$
$$\tau \Vdash F_e(x,y) \iff \langle x,y\rangle \in W_e(\tau^+) \iff \tau \Vdash F_e(\langle x,y\rangle).$$

Лема 12.14. *Ако f е генерична (частична) регулярна номерация на B, то $f \not\leq_e B$.*

Забележка. Доказателството не използва, че f е тотална.

Доказателство. Допускаме, че $f \leq_e B$. Да разгледаме

$$S = \{\tau \text{ - (частична) } B\text{-регулярна крайна част} \mid (\exists x)(!\tau(x) \,\&\, \tau(x) \not\simeq f(x))\}.$$

Имаме, че $S \leq_e B \oplus \langle f\rangle$, но $\langle f\rangle \leq_e B \Rightarrow S \leq_e B$. Тогава поради генеричността на f имаме

$$(\exists \tau \subseteq f)(\underbrace{\tau \in S}_{\tau \not\subseteq f} \vee \underbrace{(\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S)}_{\text{не е вярно за } f \not\supseteq \rho \supseteq \tau}).$$

И в двата случая стигаме до противоречие. $\square$

Твърдение 12.15. *Нека f е генерична частична регулярна номерация на B. Тогава f е квазиминимална над B.*

Доказателство. Знаем, че $f \leq_e B$, а от Лема 12.14 знаем, че обратното не е вярно.

Достатъчно е да видим, че ако $\psi \leq_e f$ е произволна тотална функция, то $\psi \leq_e B$. Нека $\psi = W_e(\langle f\rangle)$. Тогава $\psi(x) \simeq y \iff f \models F_e(x,y)$. Нека

$$S_0 = \{\tau \text{ - частична } B\text{-регулярна крайна част} \mid (\exists x)(\exists y_1)(\exists y_2)(\tau \Vdash F_e(x,y_1) \,\& \\ \tau \Vdash F_e(x,y_2) \,\&\, y_1 \neq y_2)\}.$$

Очевидно $S_0 \leq_e B$. Тогава от генеричността на f следва, че

$$(\exists \tau_0 \subseteq f)(\tau_0 \in S_0 \vee (\forall \rho \supseteq \tau_0)(\rho \notin S_0)).$$

Ако допуснем, че $\tau_0 \in S_0$, тогава

$$(\exists y_1 \neq y_2)(\tau_0 \Vdash F_e(x,y_1) \,\&\, \tau_0 \Vdash F_e(x,y_2)) \Rightarrow f \models F_e(x,y_1) \,\&\, f \models F_e(x,y_2),$$

което е противоречие с факта, че ψ е функция. Тогава имаме $(\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S_0)$.

Ще докажем, че

$$\psi(x) \simeq y \iff (\exists \rho \supseteq \tau_0)(\rho \Vdash F_e(x,y)).$$

($\Rightarrow$) Нека $\psi(x) \simeq y \Rightarrow f \models F_e(x,y) \Rightarrow (\exists \rho \subseteq f)(\rho \Vdash F_e(x,y))$ и без ограничение можем да считаме, че $\rho \supseteq \tau_0$.

($\Leftarrow$) Нека сега $(\exists \rho \supseteq \tau_0)(\rho \Vdash F_e(x,y))$. Да разгледаме множеството

$$S_1 = \{\rho \text{ - частична } B\text{-регулярна крайна част} \mid (\exists x)(\exists y_1 \neq y_2)(\exists \tau \supseteq \tau_0) \\ (\exists \delta_1 \supseteq \tau)(\exists \delta_2 \supseteq \tau)(\delta_1 \Vdash F_e(x,y_1) \,\&\, \delta_2 \Vdash F_e(x,y_2) \,\&\, |\rho| = max(|\delta_1|, |\delta_2|) \,\& \\ \&\, \rho \supseteq \tau \,\&(\forall z)(|\tau| \leq z < |\rho| \Rightarrow \rho(z) = \bot))\}.$$

Вижда се, че $S_1 \leq_e B$. Тогава от генеричността на f следва, че

$$(\exists \tau_1 \subseteq f)(\tau_1 \in S_1 \vee (\forall \rho \supseteq \tau_1)(\rho \notin S_1)).$$

I сл. $\tau_1 \in S_1$. Да фиксираме съответните $x, y_1 \neq y_2, \tau, \delta_1, \delta_2$. Знаем, че ψ е тотална. Нека $\psi(x) \simeq y$ и за определеност да считаме, че $y \neq y_1$. Тогава $f \models F_e(x,y) \Rightarrow (\exists f \supseteq \rho_1 \supseteq \tau_1)(\rho_1 \Vdash F_e(x,y))$. Ще проектираме δ_1 върху τ_1, като променим ρ_1, но запазим форсинга:

$$\rho_1'(x) \simeq \begin{cases} \tau(x) & \text{, ако } x < |\tau| \\ \delta_1(x) & \text{, ако } |\tau| \leq x < |\delta_1| \\ \rho_1(x) & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Имаме, че $(\rho_1')^+ \supseteq \rho_1^+ \Rightarrow \rho_1' \Vdash F_e(x,y)$. От друга страна $(\rho_1')^+ \supseteq \delta_1^+ \Rightarrow \rho_1' \Vdash F_e(x,y_1)$. Но $y \neq y_1 \Rightarrow \tau \subseteq \rho_1' \in S_0$, което е противоречие, т.е. не е възможно $\tau_1 \in S_1$.

II сл. $(\forall \rho \supseteq \tau_1)(\rho \notin S_1)$. Нека $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

Нека $\rho \supseteq \tau_0$ и $\rho \Vdash F_e(x,y)$. Можем да считаме, че $\rho \supseteq \tau$. Да допуснем, че $\psi(x) \simeq y_1 \neq y$. Тогава $f \models F_e(x,y_1)$ и следователно $(\exists \delta \subseteq f)(\delta \Vdash F_e(x,y_1))$, като можем да считаме, че $\delta \supseteq \tau$. Да дефинираме ρ' по следния начин:

$$\rho'(x) \simeq \begin{cases} \tau(x) & \text{, ако } x < |\tau| \\ \bot & \text{, ако } |\tau| \leq x < max(|\delta|, |\rho|) \\ \neg ! & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Вижда се, че $x, y, y_1, \delta, \rho, \tau$ отговарят на условието на S_1 за ρ', т.е. $\rho' \in S_1$ - противоречие.

Тогава единствения възможен случай е $\psi(x) \simeq y$.

В крайна сметка получихме

$$\psi(x) \simeq y \iff (\exists \rho \supseteq \tau_0)(\rho \Vdash F_e(x,y)),$$

т.е. $\psi \leq_e B$. □

ТЕМА 13

Теореми за минимални двойки. Изброими идеали

Дефиниция 13.1. Казваче, че множествата F и G образуват *минимална двойка за* B, ако

(1) $B \lneq_e F, B \lneq_e G$;
(2) $A \lneq_e F, A \lneq_e G \Rightarrow A \leq_e B$,

т.е. B е точна долна граница на F и G.

Ще покажем, че за всяко множество B има тотални множества F и G, които образуват минимална двойка за B.

Подобно на генеричност за частични регулярни номерации, можем да въведем генеричност за регулярни номерации:

Дефиниция 13.2. Казваме, че f е *генерична регулярна номерация* на B, ако f е регулярна номерация на B и за всяко $S \leq_e B$, което се състои от B-регулярни крайни части

$$(\exists \tau \subseteq f)(\tau \in S \vee (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \notin S)).$$

Твърдение 13.3. *Нека $B \subseteq \mathbb{N}$, а $\{A_n\}$ е редица от множества, такава че $(\forall n)(A_n \nleq_e B)$. Тогава съществува генерична регулярна номерация f на B, такава че $(\forall n)(A_n \nleq_e f)$.*

Доказателство. Доказателството е подобно на доказателството на Твърдение 12.11

Ще построим монотонно растяща редица от B-регулярни крайни части $\tau_q : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N}$. Нека $\tau_0(0) = \tau_0(1) = b_0 \in B$. Нека сме построили τ_q.

I сл. $q = 3e$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * 0 * b$, където b е първият неномериран елемент на B.

II сл. $q = 3e+1$. Ще осигурим генеричност на f. Нека $S_e = W_e(B) \cap R_B$, където $R_B = \{\tau \mid \tau \text{ е B-регулярна крайна част}\}$. Полагаме τ_{q+1} да бъде найналкото $\tau \supseteq \tau_q$, $\tau \in S_e$, ако такова има. Ако няма - полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q$.

III сл. $q = 3e+2$. Нека $e = \langle n, k \rangle$. Ще осигурим, че $A_n \nleq_e f$, като сме сигурни, че $f^{-1}(A_n) \neq W_k(\langle f \rangle)$. Тогава ще имаме $f^{-1}(A_n) \nleq_e f$ и оттам $A_n \nleq_e f$.

Нека

$$n_q = |\tau_q|$$
$$C_q = \{x \mid (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\underbrace{\tau \text{ е } B\text{-регулярна крайна част}}_{\leq_e B}) \,\&\, \underbrace{\tau(n_q) \simeq x}_{\text{ефективно}} \,\&\, \underbrace{\tau \Vdash F_k(n_q)}_{\text{ефективно}}\}$$

Очевидно $C_q \leq_e B$ и следователно $C_q \neq A_n$.

III.1) $(\exists x)(x \in C_q \,\&\, x \notin A_n)$. Тогава избираме най-малкото такова x и полагаме τ_{q+1} да е най-малкото му съответно τ.

III.2) $(\exists x)(x \notin C_q \,\&\, x \in A_n)$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * x * b$, където b е някой елемент на B.

Нека дефинираме f по следния начин:

$$f(n) \simeq x \iff (\exists q)(\tau_q(n) \simeq x)$$

Осигурили сме f да е генерична регулярна номерация на B по дефиниция. Остава да докажем, че $f^{-1}(A_n) \not\leq_e f$.

Да допуснем, че $f^{-1}(A_n) \equiv_e W_k(\langle f \rangle)$ за някои n и k. Да разгледаме стъпка $q = 3\langle n, k \rangle + 2$. Знаем, че $f(n_q) \simeq x \in A_n \triangle C_q$.

I сл. $x \in C_q \,\&\, x \notin A_n$. Тогава

$$f \models F_k(n_q) \Rightarrow n_q \in f^{-1}(A_n) \Rightarrow f(n_q) = x \in A_n \text{ - противоречие.}$$

II сл. $x \notin C_q \,\&\, x \in A_n$. Тогава

$$n_q \in f^{-1}(A) \Rightarrow (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\tau(n_q) \simeq x \,\&\, \tau \Vdash F_k(n_q)) \Rightarrow x \in C_q \text{ - противоречие.}$$

Тогава $f^{-1}(A_n) \not\leq_e f \Rightarrow A_n \not\leq_e f$. □

Теорема 13.4 (за минималните двойки). *Нека $B \subseteq \mathbb{N}$. Тогава има минимална двойка F и G за B.*

Доказателство. Нека f е произволна генерична регулярна номерация на B. Нека $\{A_n\}$ е редицата от тези множества, които са $\leq_e f$ и $\not\leq_e B$ (те са изброимо много). Съгласно Твърдение 13.3 построяваме g, така че g е генерична и $(\forall n)(A_n \not\leq_e g)$. Нека положим $F = \langle f \rangle, G = \langle g \rangle$. Ясно е, че съгласно Лема 12.14 $B \lneq_e F, B \lneq_e G$. Нека $A \leq_e F, A \leq_e G$. Тогава $A \notin \{A_n\}$, иначе $A \not\leq_e G$. Щом $A \notin \{A_n\}$, то $A \leq_e B$. □

Дефиниция 13.5. $I \subseteq D_e$ наричаме *идеал*, ако:

(1) $x \in I \,\&\, y \leq x \Rightarrow y \in I$.
(2) $x, y \in I \Rightarrow x \cup y \in I$.

Казваме, че I е *главен идеал*, породен от x ако $I = \{y \mid y \leq x\}$.

Всички доказани до момента твърдения важат за главни идеали. Сега щу формулираме част от твърденията за произволни изброими идеали. Оттук нататък ще считаме, че $I = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ е изброим идеал.

Твърдение 13.6. $x \in I \iff (\exists n)(x \leq b_0 \cup \dots \cup b_n)$.

Доказателство. $(\Rightarrow)$ Ако $x \in I$, то $x = b_k$ за някое k, тогава $x \leq \bigcup_{i=0}^{k} b_i$. $(\Leftarrow)$ Ако $(x \leq b_0 \cup \dots \cup b_n)$ за някое n, то понеже I е идеал следва, че $x \in I$. □

Така можем да считаме, че I е монотонно растяща редица от степени $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots$, такава че $x \in I \iff (\exists n)(x \leq b_n)$. Ако идеалът е главен, тази редица се стабилизира. Ако пък идеалът не е главен, то тази редица може да се избере строго монотонна. Пример за такава редица са аритметичните множества (скоковете на 0):

$$0 < 0' < 0'' < 0''' < \dots < 0^{(n)} < \dots$$

Накрая можем да считаме когато имаме даден идеал, че ни е дадена редица от множества, представители на съответните степени:

$$B_0 \leq_e B_1 \leq_e B_2 \leq_e \dots \leq_e B_n \leq_e \dots$$

За да построим горна граница на изброим идеал, ще трябва да дефинираме понятието регулярна номерация на идеал, подобно на регулярна номерация на едно множество. Директният превод на дефиницията обаче се оказва прекалено силен, затова е необходимо да вземем отслабен вариант:

Дефиниция 13.7. Казваме, че $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ е регулярна номерация на идеала $I(\{B_n\})$, ако:

(1) $(\overset{\infty}{\forall} n)(f(2\langle n,k\rangle + 1) \in B_k)$;
(2) Ако $z \in B_n$, то $(\overset{\infty}{\exists} n)(f(2\langle n,k\rangle + 1) \simeq z)$.

Забележка. Тук използваме означенията

$$(\overset{\infty}{\forall} n) \leftrightharpoons (\exists N)(\forall n > N) \text{ (за почти всички, всички без краен брой)},$$

$$(\overset{\infty}{\exists} n) \leftrightharpoons (\forall N)(\exists n > N) \text{ (има безкрайно много)}.$$

Лема 13.8. *Ако f е регулярна номерация на $I(\{B_n\})$, то $(\forall k)(B_k \leq_e f)$.*

Доказателство. Нека фиксираме k. От (1) следва, че можем да фиксираме m, така че $(\forall n > m)(f(2\langle n,k\rangle + 1) \in B_k)$. Нека $z \in B_k$. Тогава от (2) имаме, че за някое $n > m$ $f(2\langle n,k\rangle + 1) \simeq z$. Изобщо

$$B_k = \{z \mid (\exists n > m)(f(2\langle n,k\rangle + 1) \simeq z)\},$$

откъдето $B_k \leq_e f$. □

Забележка. Въпреки, че не можем да намерим ефективно по k числото m, за което сме сигурни, че $(\forall n > m)(f(2\langle n,k\rangle + 1) \in B_k)$ в общия случай това няма да ни трябва.

Регулярни номерации на идеали ще строим отново с крайни части, като за всяко множество B_k ефективно ще посочваме номер m, от който нататък ще се *задължаваме* (ще *поемаме задължението*) да изпълняваме (1) и (2).

От този момент нататък ще считаме, че идеалът се представя с множествата

$$B_0 \lneq_e B_1 \lneq_e B_2 \lneq_e \cdots \lneq_e B_n \lneq_e \dots,$$

т.е. редицата е строго монотонна, а идеалът не е главен.

Твърдение 13.9. *Нека $A \subseteq \mathbb{N}$, така че $(\forall k)(A \lneq_e B_k)$. Тогава съществува регулярна номерация f, такава че $A \lneq_e f$.*

Ще докажем това твърдение в малко по-общ вид.

Твърдение 13.10. *Нека $\{A_s\}$ е редица от множества, такава че*

$$(\forall s)(\forall k)(A_s \not\leq_e B_k).$$

Тогава съществува регулярна номерация f, че $(\forall s)(A_s \not\leq_e f)$.

Доказателство. Ще построим монотонно растяща редица от крайни части $\tau_q : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N}$, като за всяко q ще казваме за кои B_k крайната част τ_q е поела задължение. Нека считаме, че $\{z_n^k\}$ е номерация на елементите на B_k с безбройно много повторения на всеки елемент. Нека $\tau_0(0) = \tau_0(1) = 0$, без да поема никакви задължения. Нека сме построили τ_q и сме поели задължения за $B_0, \dots, B_m$. Да означим $n_q = |\tau_q|$.

I сл. $q = 2e$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * 0 * z_n^k$, където $n_q + 1 = 2\langle n,k\rangle + 1$ и нека да поемем задължение за $B_0, \dots, B_{m+1}$.

II сл. $q = 2\langle s, e\rangle + 1$. Нека

$$C_q = \{x \mid (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\tau \text{ изпълнява поетите задължения за } B_0 \dots B_m \\ \& \, \tau(|\tau_q|) \simeq x \,\&\, \tau \Vdash F_e(|\tau_q|))\}.$$

Вижда се, че $C_q \leq_e B_0 \oplus \ldots \oplus B_m \leq_e B_m$, понеже редицата е монотонно растяща. Тогава $C_q \neq A$.

II.1) $(\exists x)(x \in C_q \,\&\, x \notin A_s)$. Тогава избираме най-малкото такова x и полагаме τ_{q+1} да е най-малкото му съответно τ .

II.2) $(\exists x)(x \notin C_q \,\&\, x \in A_s)$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * x * z_n^k$, където $n_q + 1 = 2\langle n, k\rangle + 1$.

Нека дефинираме $f = \bigcup \tau_q$. Вижда се, че сме изпълнили задълженията за всички множества $B_0, \ldots, B_m, \ldots$. Остава да докажем, че $(\forall s)(A_s \leq_e f)$.

Да допуснем, че за някое s $f^{-1}(A_s) \equiv_e W_e(\langle f\rangle)$. Да разгледаме стъпка $q = 2\langle s, e\rangle + 1$. Знаем, че $f(n_q) \simeq x \in A_s \triangle C_q$.

I сл. $x \in C_q \,\&\, x \notin A_s$. Тогава

$$f \models F_e(n_q) \Rightarrow n_q \in f^{-1}(A_s) \Rightarrow f(n_q) = x \in A_s \text{ - противоречие.}$$

II сл. $x \notin C_q \,\&\, x \in A_s$. Тогава

$$n_q \in f^{-1}(A_s) \Rightarrow (\exists \tau \supseteq \tau_q)(\tau(n_q) \simeq x \,\&\, \tau \Vdash F_e(n_q)) \Rightarrow x \in C_q \text{ - противоречие.}$$

Тогава $(\forall s)(f^{-1}(A_s) \not\leq_e f) \Rightarrow (\forall s)(A_s \not\leq_e f)$. □

Може да се дефинира еквивалент на понятието минимална двойка за идеали и да се докаже Теорема, подобна на Теорема 13.4.

Дефиниция 13.11. Казваче, че множествата F и G образуват *точна двойка* за идеала $I(\{B_k\})$, ако

(1) $(\forall k)(B_k \leq_e F, B_k \leq_e G)$;
(2) $A \lneq_e F, A \lneq_e G \Rightarrow A \in I$,

Теорема 13.12. *Нека $I(\{B_k\})$ е идеал. Тогава I има точна двойка F и G.*

Доказателство. Нека f е произволна регулярна номерация на идеала $I(\{B_k\})$. Нека A_n е редицата от тези множества, които са $\leq_e f$ и не са в идеала I (те са изброимо много). Съгласно Твърдение 13.10 построяваме g, така че g е регулярна номерация на I и $(\forall n)(A_n \not\leq_e g)$. Нека положим $F = \langle f\rangle, G = \langle g\rangle$. Ясно е, че съгласно Лема 13.8 $B \leq_e F, B \leq_e G$. Нека $A \leq_e F, A \leq_e G$. Тогава $A \notin \{A_n\}$, иначе $A_n \not\leq_e G$. Щом $A \notin \{A_n\}$, то $A \in I$. □

Следствие 13.13. *Има тотални множества F и G, които имат точна долна граница в D_T, но нямат такава в D_e.*

Доказателство. Нека $B_0 = \emptyset, B_{k+1}$ е квазиминимално относно B_k. Тогава

$$B_0 <_e B_1 <_e \cdots <_e B_k <_e \ldots$$

определя неглавен идеал. За него имаме точна двойка F и G, които са тотални множества. Ако за някое $X \leq_e F, X \leq_e G$, то имаме $X \leq_e B_k$ за някое k, т.е. F и G нямат точна долна граница в D_e.

Нека сега X е тотално, $X \leq_e F, X \leq_e G$. Тогава $X \leq_e B_k$, но B_k е квазиминимално относно $B_{k-1} \Rightarrow X \leq_e B_{k-1}$. Аналогично $X \leq_e B_{k-2}, \ldots, X \leq_e \emptyset$, но $\emptyset$ е тотално, следователно $X \leq_T \emptyset$. Така точната долна граница на F и G в D_T е $\emptyset$. □

Можем да релативизираме и понятието квазиминималност относно идеал.

Дефиниция 13.14. Нека $I(B_k)$ е неглавен идеал. Казваме, че F е *квазиминимално относно* I, ако

(1) $(\forall k)(B_k \leq_e F)$,
(2) Ако X е тотално и $X \leq_e F$, то $X \in I$.

За да докажем съществуването на квазиминимални множества за всеки идеал е необходимо да въведем частични регулярни номерации на идеали.

Дефиниция 13.15. Казваме, че $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ е *частична регулярна номерация на идеала* $I(\{B_k\})$, ако:

(1) $(\overset{\infty}{\forall} n)(!f(2\langle n,k\rangle+1) \Rightarrow f(2\langle n,k\rangle+1) \in B_k)$;
(2) Ако $z \in B_n$, то $(\overset{\infty}{\exists} n)(f(2\langle n,k\rangle+1) \simeq z)$.

Забележка. Лема 13.8 не използва съществено тоталност на регулярната номерация f затова важи и за частични регулярни номерации.

Дефиниция 13.16. Казваме, че $\tau : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ е *частична I-регулярна крайна част*, ако:

$$2n+1 \in dom(\tau) \,\&\, \tau(2n+1) \neq \perp \Rightarrow \tau(2n+1) \in I.$$

Дефиниция 13.17. Казваме, че $\tau \subseteq f$, ако:

$$(\forall x \in dom(\tau))(\tau(x) \neq \perp \Rightarrow \tau(x) \simeq f(x) \,\&\, \tau(x) = \perp \Rightarrow \neg!f(x)).$$

Твърдение 13.18. *Нека $I(\{B_k\})$ е неглавен идеал. Съществува частична регулярна номерация f на I, така че $\langle f\rangle$ е квазиминимално относно I.*

Доказателство. Ще построим монотонно растяща редица от частични I-регулярни крайни части $\tau_q : [0; 2q+1] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, като за всяко q ще казваме за кои B_k крайната част τ_q е поела задължение. Нека считаме, че $\left\{z_n^k\right\}$ е номерация на елементите на B_k с безбройно много повторения на всеки елемент.

Нека $\tau_0(0) = \tau_0(1) = 0$, без да поема никакви задължения. Нека сме построили τ_q и сме поели задължения за $B_0, \ldots, B_m$. Да означим $n_q = |\tau_q|$.

I сл. $q = 2e$. Полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q * 0 * z_n^k$, където $n_q + 1 = 2\langle n,k\rangle + 1$ и нека да поемем задължение за $B_0, \ldots, B_{m+1}$.

II сл. $q = 2e+1$. Задаваме въпроса дали

(a) $$(\exists \rho \supseteq \tau_q)(\rho \text{ изпълнява поетите задължения за } B_0, \ldots, B_m \,\& \\ \&(\exists x)(\exists y_1 \neq y_2)(\rho \Vdash F_e(x,y_1) \,\&\, \rho \Vdash F_e(x,y_2))).$$

В случай, че отговорът е *да*, полагаме τ_{q+1} да е най-малкото такова ρ. В случай, че отговорът е *не*, задаваме втори въпрос:

(b) $$(\exists x)(\exists y_1 \neq y_2)(\exists \tau \supseteq \tau_q)(\exists \rho \supseteq \tau)(\exists \delta_1 \supseteq \tau)(\exists \delta_2 \supseteq \tau) \\ (\rho, \delta_1, \delta_2 \text{ изпълняват поетите задължения за } B_0, \ldots, B_m \,\& \\ \delta_1 \Vdash F_e(x,y_1) \,\&\, \delta_2 \Vdash F_e(x,y_2) \,\&\, |\rho| = max(|\delta_1|, |\delta_2|) \,\& \\ \&(\forall z)(|\tau| \leq z < |\rho| \Rightarrow \rho(z) = \perp)).$$

Ако отговорът е *да*, полагаме τ_{q+1} да бъде най-малкото такова ρ. Ако отговорът е *не*, полагаме $\tau_{q+1} = \tau_q$.

Полагаме $f = \bigcup \tau_q$. Вижда се, че f е регулярна номерация на I, откъдето $(\forall k)(B_k \leq_e f)$. за доказателството на (2) е достатъчно да видим, че ако $\psi = W_e(\langle f \rangle)$ е произволна тотална функция, то $\psi \leq_e B_k$ за някое k.

Нека $\psi(x) \simeq y \Rightarrow f \models F_e(x,y) \Rightarrow (\exists \rho \subseteq f)(\rho \Vdash F_e(x,y))$ и без ограничение можем да считаме, че $\rho \supseteq \tau_0$.

Да разгледаме стъпка $q = 2e+1$. Нека τ_q е задължено относно $B_0, \dots, B_m$. Тогава ще докажем, че $\psi \leq_e B_m$. За тази цел ще видим, че

$$(*) \qquad \psi(x) \simeq y \iff (\exists \rho \supseteq \tau_{q+1})(\rho \text{ изпълнява поетите задължения за } B_0, \dots, B_m \,\&\, \rho \Vdash F_e(x,y)).$$

($\Rightarrow$) Нека $\psi(x) \simeq y \Rightarrow f \models F_e(x,y) \Rightarrow (\exists \delta \subseteq f)(\delta \Vdash F_e(x,y))$, което изпълнява поетите задължения и без ограничение можем да считаме, че $\delta \supseteq \tau_{q+1}$.

($\Leftarrow$) Нека сега $(\exists \delta \supseteq \tau_{q+1})(\delta \Vdash F_e(x,y)$ и δ е задължено за $B_0, \dots, B_m)$. Отговорът на въпрос (a) е бил *не*, в противен случай ψ ще бъде многозначна. Да допуснем, че $\psi(x) \simeq z \neq y$. Тогава има ρ_1, което изпълнява задълженията за $B_0, \dots, B_m$ и $\rho_1 \Vdash F_e(x,z)$ и можем да считаме, че $\rho_1 \supseteq \tau_{q+1}$. Нека

$$\delta'(x) \simeq \begin{cases} \tau_{q+1}(x) & \text{, ако } x < |\tau_{q+1}|\,; \\ \perp & \text{, ако } |\tau_{q+1}| \leq x < max(|\rho_1|\,, |\delta|); \\ \neg ! & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Тогава отговорът на въпрос (b) е бил *да*, като свидетели са $x, y, z, \tau_{q+1}, \delta', \delta$ и ρ_1.

Тогава τ_{q+1} е най-малкото ρ от въпрос (b) и за него имаме съответните $x', y_1 \neq y_2, \tau, \delta_1, \delta_2$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $z \neq y_1$. Нека

$$\rho_1'(x) \simeq \begin{cases} \tau(x) & \text{, ако } x < |\tau| \\ \delta_1(x) & \text{, ако } |\tau| \leq x < |\delta_1| \\ \rho_1(x) & \text{, иначе.} \end{cases}$$

$(\rho_1')^+ \subseteq \delta_1^+ \Rightarrow \rho_1'$ изпълнява поетите задължения за $B_0, \dots, B_m$ и освен това $\rho_1' \Vdash F_e(x', y_1)$. От друга страна, тъй като $\rho_1 \supseteq \tau_{q+1}$, за което е в сила свойството (b), $(\rho_1')^+ \supseteq \rho_1^+ \Rightarrow \rho_1' \Vdash F_e(x', z)$. Оттук следва, че отговорът на въпрос (a) е бил *да* със свидетели x', y_1, z, ρ_1', което е противоречие.

В крайна сметка получихме $(*)$, откъдето $\psi \leq_e B_m \Rightarrow \psi \in I$. $\square$

Следствие 13.19. *Има тотални множества G и H, които имат точна долна граница в D_e, но нямат такава в D_T.*

Доказателство. Да разгледаме идеала

$$I = \emptyset <_e \emptyset' <_e \cdots <_e \emptyset^{(n)} <_e \dots$$

Съгласно Твърдение 13.18 имаме F - тотално, квазиминимално относно I. Съгласно Теорема 13.4 можем да намерим G и H - минимална двойка за F. Тогава G и H ще имат за долна граница F в D_e.

От друга страна G и H са точна двойка за идеала I в D_T:

(1) Очевидно $(\forall k)(B_k \leq_e F \leq_e G, B_k \leq_e F \leq_e H)$.

(2) Нека X е тотално, $X \leq_e G, X \leq_e H \Rightarrow X \leq_e F$, но F е квазиминимално относно I, следователно $X \in I$.

Тъй като идеалът не е главен, то G и H нямат точна долна граница в D_T. $\square$

ТЕМА 14

D_e не съдържа минимални степени

Дефиниция 14.1. Ще казваме, че е-операторът W_e е *s-оператор (синглетонен оператор)*, ако

$$\langle\langle i,j\rangle, v\rangle \in W_e \Rightarrow D_v = \emptyset \vee D_v = \{j\}.$$

Лема 14.2. *Ако W_e е s-оператор, а $B \leq_T \emptyset'$ то*

$$\lim_{s\to\infty} W_e^s(B^s)(x) = W_e(B)(x),$$

където $\{W_e^s\}$ са апроксимации на полуразрешимото W_e и съгласно Тема 2, а $\{B^s\}$ за апроксимации на $B \leq_T \emptyset'$ съгласно Следствие 2.14.

Доказателство. Нека $x = \langle i,j\rangle$.

I сл. $(\nexists v)(\langle x,v\rangle \in W_e)$. Тогава

$$\begin{aligned}(\forall s)(\forall v)(\langle x,v\rangle \notin W_e^s) &\Rightarrow (\forall s)(W_e^s(B^s)(x) = 1)\\ &\Rightarrow \lim_{s\to\infty} W_e^s(B^s)(x) = 1 = W_e(B)(x).\end{aligned}$$

II сл. $\langle x,v\rangle \in W_e \,\&\, D_v = \emptyset$. Тогава

$$(\exists r)(\forall s > r)(\langle x,v\rangle \in W_e^s) \Rightarrow \lim_{s\to\infty} W_e^s(B^s)(x) = 0 = W_e(B)(x).$$

III сл. $\langle\langle i,j\rangle, v\rangle \in W_e \,\&\, D_v = \{j\}$. Тогава

$$\begin{aligned}(\exists r_1)(\forall s > r_1)(\chi_{B^s}(j) = \chi_B(j)) \,\&\, (\exists r_2)(\forall s > r_2)(\langle\langle i,j\rangle, v\rangle \in W_e^s)\\ \Rightarrow (\forall s > max(r_1,r_2))(W_e^s(B^s)(x) = W_e(B)(x)).\end{aligned}$$

□

Забележка. Оттук нататък за по-кратко ще бележим $\langle x, D_v\rangle$, вместо $\langle x,v\rangle$.

Твърдение 14.3 (Гутерич). *Нека $\emptyset \lneq_T B \leq_T \emptyset'$. Тогава има е-оператор θ, такъв че $\emptyset \lneq_e \theta(B) \lneq_e B$.*

Доказателство. Ще строим s-оператора θ на стъпки, така че

$$(\forall e)(W_e \neq \theta(B)) \tag{1}$$

$$(\forall e)(W_e(\theta(B)) \neq B). \tag{2}$$

Ще прилагаме т.нар. техника check-and-cross.

Дефиниция 14.4.

$$\checkmark \langle i,j\rangle \text{ в } \theta^s \leftrightharpoons \text{ причисляваме } \langle\langle i,j\rangle, \{j\}\rangle \text{ в } \theta^{s+1}$$

$$\times \langle i,j\rangle \text{ в } \theta^s \leftrightharpoons \text{ причисляваме } \langle\langle i,j\rangle, \emptyset\rangle \text{ в } \theta^{s+1}.$$

Дефиниция 14.5.

$$L(e,s) = max\,\{x \mid x \leq s\,\&(\forall y < x)(W_e^s(y) = \theta^s(B^s)(y))\}$$
$$l(e,s) = max\,\{x \mid x \leq s\,\&(\forall y < x)(B^s(y) = W_e^s(\theta^s(B^s))(y))\}$$

наричаме *agreement функции*, те ни дават дължината на максималния начален сегмент, ограничен от s, върху който съвпадат съответно W_e^s и $\theta^s(B^s)$, B^s и $W_e^s(\theta^s(B^s))$.

Дефиниция 14.6.

$$u(e,s,x) = \begin{cases} \mu z[(\forall y < x)(B^s(y) = W_e^s(\theta^s(B^s \restriction z))(y))] & \text{, ако такива има;} \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases}$$
$$r(e,s) = max\,\{u(e,s,x) \mid x \leq l(e,s)\}\,.$$

$u(e,s,x)$ наричаме use-функция и тя ни дава най-малкият начален сегмент от B^s, който може да се използва при проверката, че $B^s = W_e^s(\theta_s(B^s))$ върху $[0; x-1]$.

$r(e,s)$ наричаме restrain-функция и тя ни дава най-малкият начален сегмент от B^s, който ще ни свърши работа за горепосочената проверка за всички x, които ще разглеждаме на s-та стъпка.

Полагаме $\theta^0 = \emptyset$. Нека θ^s е построена. За всяко $e \leq s$ правим следното:

(a) $\checkmark\,\langle e,j\rangle$ в θ^s за всяко $j \leq L(e,s)$;
(b) $\times\,\langle i,j\rangle$ в θ^s за всяко $\langle i,j\rangle \leq r(e,s)$ и $i > e$.

По този начин получаваме θ^{s+1}. Да положим $\theta = \bigcup_s \theta^s$. Поради дефиницията на $\checkmark$ и $\times$ се вижда, че θ е s-оператор. Тогава по Лема 14.2 имаме, че

$$\lim_{s\to\infty} \theta^s(B^s) = \theta(B).$$

Дефиниция 14.7. Казваме, че изискването $W_e \neq \theta(B)$ има приоритетен номер $2e+1$, а изискването $W_e(\theta(B)) \neq B$ има приоритетен номер $2e$. По-висок приоритет имат изискванията с по-нисък приоритетен номер.

Дефиниция 14.8. Казваме, че $W_e \neq \theta(B)$ предизвиква внимание на стъпка s, ако на тази стъпка $\checkmark\,\langle e,j\rangle$ за първи път.

Казваме, че $B \neq W_e(\theta(B))$ предизвиква внимание на стъпка s, ако на тази стъпка $\times\,\langle i,j\rangle\,, i > e$ за първи път.

Лема 14.9. *Всяко изискване предизвиква внимание краен брой пъти.*

Доказателство. Нека R_P е изискването с най-висок приоритет, което предизвиква внимание безкраен брой пъти.

I сл. $R_P = W_e \neq \theta(B)$. Тогава на безкраен брой стъпки сме имали нови $e \leq s, j \leq L(e,s)$, откъдето $L(e,s)$ расте неограничено. Тогава ще имаме безкрайно големи сегменти на съгласие между W_e^s и $\theta_s(B^s)$. Тогава имаме $\theta(B) = W_e$. Но щом $L(e,s)$ расте неограничено, то $(\forall j)(\checkmark\,\langle e,j\rangle$ в $\theta)$.

R_P е изискването с най-нисък приоритетен номер $2e+1$, което предизвиква внимание на безкраен брой стъпки, следователно изискването $B \neq W_e(\theta(B))$

с номер $2e$ не предизвиква внимание безкраен брой пъти. Тогава можем да твърдим, че

$$\begin{aligned} & (\overset{\infty}{\forall} j)(\checkmark \langle e,j\rangle \,\&\, \neg \times \langle e,j\rangle) \\ \iff & (\overset{\infty}{\forall} j)(\langle \langle e,j\rangle, \{j\}\rangle \in \theta \,\&\, \langle \langle e,j\rangle, \emptyset\rangle \notin \theta) \\ \iff & (\overset{\infty}{\forall} j)(\langle e,j\rangle \in \theta(B) \iff j \in B) \\ \iff & (\overset{\infty}{\forall} j)(\langle e,j\rangle \in W_e \iff j \in B). \end{aligned}$$

Тогава получаваме, че $B \leq_e W_e \Rightarrow B \leq_e \emptyset$ - противоречие с условието.

II сл. $R_P = B \neq W_e(\theta(B))$. Тогава на безкраен брой стъпки сме имали нови $i > e, \langle i,j\rangle \leq r(e,s)$, откъдето $r(e,s)$ расте неограничено с нарастването на s. Оттук имаме, че $l(e,s)$ също расте неограничено, в противен случай бихме имали, че $u(e,s,x)$ расте неограничено с s за ограничени x, което не е възможно. Тогава ще имаме безкрайно големи сегменти на съгласие между $W_e^s(\theta^s(B^s))$ и B^s.

Оттук не можем директно да заключим, че $W_e(\theta(B)) = B$, понеже не можем да приложим Лема 14.2 за произволния е-оператор W_e.

Тъй като $r(e,s)$ расте неограничено, тогава $(\forall i > e)(\forall j)(\times \langle i,j\rangle$ в $\theta)$.

Нека

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\langle i,j\rangle \mid i > e\}, \\ C_2 &= \{\langle i,j\rangle \mid i \leq e \,\&\, \times \langle i,j\rangle \text{ в } \theta\}, \\ C &= C_1 \cup C_2 \\ F &= \{\langle i,j\rangle \mid i \leq e \,\&\, \checkmark \langle i,j\rangle \text{ в } \theta \,\&\, j \in B\}. \end{aligned}$$

Очевидно C_1 е полуразрешимо. Тъй като R_P е изискването с най-висок приоритет, което е предизвикало внимание безкраен брой пъти, то за изискванията R_{2i} и R_{2i+1} за $i < e$ са предизвикали внимание краен брой пъти и следователно множествата C_2 и F са крайни. Оттук следва, че множеството $C \cup F$ е полуразрешимо.

Вярно е, че

$$\begin{aligned} \langle i,j\rangle \in \theta(B) &\iff \times \langle i,j\rangle \vee (\checkmark \langle i,j\rangle \,\&\, j \in B) \\ &\iff (\langle i,j\rangle \in C) \vee (\langle i,j\rangle \in F) \\ &\iff \langle i,j\rangle \in C \cup F. \end{aligned}$$

Така получихме, че $\theta(B)$ е полуразрешимо. Тогава имаме:

$$\begin{aligned} z \in B &\iff (\exists s)(z \in B^s) \\ &\iff (\exists s)(z \in W^s(\theta^s(B^s))) \\ \text{компактност на } W^s, \text{ Лема 14.2} &\iff (\exists s)(z \in W^s(\theta(B))) \\ &\iff \underbrace{(\exists s)(z \in W^s(C \cup F))}_{\text{полуразрешимо}}. \end{aligned}$$

Така получихме, че $B \leq_e \emptyset$, което е противоречие с условието на Лемата.

□

От Лема 14.9 получихме, че няма изискване, което да предизвиква внимание безкраен брой пъти, а оттук следва, че $L(e,s), r(e,s)$ и $l(e,s)$ са ограничени с нарастването на s, което означава, че всички изисквания се изпълняват с течение на времето, т.е.

$$(\forall e)(W_e \neq \theta(B) \,\&\, W_e(\theta(B)) \neq B).$$

$\square$

Твърдение 14.10. *Нека $B \subseteq \mathbb{N}$. Тогава има е-оператор θ, такъв че:*

(1) *Ако $\theta(B) \leq_e \emptyset$, то $B \leq_T \emptyset'$;*
(2) *Ако $B \leq_e \theta(B)$, то $B \leq_e \emptyset$.*

Доказателство. Отново ще строим s-оператора θ на стъпки, като използваме check-and-cross. Ще построим θ по такъв начин, че:

$$(\forall j)(\exists I)((\forall i > I)(\neg \times \langle i,j\rangle \text{ в } \theta) \,\&(\exists! i > I)(\checkmark \langle i,j\rangle \text{ в } \theta)),$$

т.е. във всяка колона имаме краен брой $\times$ и след тях точно едно $\checkmark$.

Нека

$$check(j) = max\left\{i \checkmark \langle i,j\rangle \text{ в } \theta\right\}.$$

Ще строим апроксимации $check(s,j)$ на $check(j)$, така че

$$\lim_{s\to\infty} check(s,j) = check(j) \leq_T \emptyset'.$$

Полагаме $\theta^0 = \emptyset$, $check(0,j) = -1$. Нека сме построили θ^s и $\lambda j.check(s,j)$.

Да разгледаме всички тройки $\langle e,n,F\rangle$, където F е крайно множество, $max(F) < n$, $e,n \leq s$. Задаваме въпроса:

$$(*) \qquad (\exists S \text{ - крайно})((\langle i,j\rangle \in S \Rightarrow j \geq max(e,n)) \,\&\, n \in W_e^s(\theta^s(F) \cup S).$$

Този въпрос има сложност $\emptyset'$.

Ако такова S има, тогава избираме най-малкото такова S и

$$(\forall \langle i,j\rangle \in S)(\times \langle i,j\rangle \text{ в } \theta^s).$$

Накрая за всяко $j \leq s$ можем ефективно да намерим последния маркиран елемент $\langle i,j\rangle$ и ако $\times \langle i,j\rangle$, то $\checkmark \langle i+1,j\rangle$ и $check(s+1,j) = i+1$.

Да положим

$$\theta = \bigcup_s \theta^s$$

$$check(j) = \lim_{s\to\infty} check(s,j).$$

Лема 14.11. $(\forall j)(\exists I)(\forall i > I)(\neg\checkmark \langle i,j\rangle \,\&\, \neg \times \langle i,j\rangle)$, *т.е. всяка колона съдържа краен брой маркирани елементи.*

Доказателство. Тъй като $\checkmark \langle i,j\rangle \Rightarrow \times \langle i-1,j\rangle$, то е достатъчно да видим, че всяка колона съдържа краен брой $\times$. Наситина, ако фиксираме j, то има краен брой тройки $\langle e,n,F\rangle$, за които $j \geq max(e,n), n > max(F)$ и има непразно S, което да удовлетворява $(*)$. Тъй като само това са възможностите, когато бихме могли да $\times \langle i,j\rangle$ за някое i, то следва, че $\times$ са краен брой. $\square$

Лема 14.12. *check* $\leq_T \emptyset'$.

Доказателство. От Лема 14.11 следва, че

$$(\forall j)(\exists \lim_{s\to\infty} check(s,j) = check(j)).$$

Въпросът $(*)$ има сложност $\emptyset'$, а той служи за регулатор на редицата $\{check(s,j)\}$. Освен това $check(s,j) \leq_T \emptyset'$, понеже стойността й зависи от същия въпрос. Тогава по Лема 2.13 следва, че $check \leq_T \emptyset'$. □

По конструкцията получихме, че $\langle check(j), j\rangle \in \theta(B) \iff j \in B$. Тогава от Лема 14.12

(1) Ако $\theta(B) \leq_e \emptyset$, то $B \leq_T \emptyset'$.

Остана да докажем, че е в сила и (2). За целта ще докажем още една

Лема 14.13. *Нека* $B = W_e(\theta(B))$. *Тогава*

$$(\forall n > e)(n \in W_e(\theta(B)) \Rightarrow n \in W_e(\theta(B\restriction n)).$$

Доказателство. Нека $n \in W_e(\theta(B))$. Тогава $n \in W_e(\theta(D))$ за някое крайно $D \subset \mathbb{N}$. Нека $F = D\restriction n$. Очевидно $max(F) < n$. $F \subseteq D \Rightarrow \theta(D) = \theta(F) \cup S$, където

$$S = \{\langle i,j\rangle \mid \langle\langle i,j\rangle, \{j\}\rangle \in \theta \,\&\, j \geq n \geq e\}.$$

Тогва на достатъчно големи стъпки $\theta^s(F) = \theta(F) \subseteq \theta(D)$. Но $F \subseteq D\restriction n \subseteq B\restriction n$, тогава $n \in W_e(\theta(B\restriction n))$. □

Нека $B = W_e(\theta(B))$. Ще построим B на стъпки, така че B да е полуразрешимо. Нека

$$B_0 = B\restriction(e+1)$$
$$B_{q+1} = W_e(\theta(B_q)) \cup B_q.$$

Очевидно $(\forall q)(B_q \subseteq B_{q+1})$. Освен това с индукция по q можем да докажем, че $(\forall q)(B_q \subseteq B)$. Очевидно твърдението е вярно за B_0. Да допуснем, че $B_q \subseteq B$. Тогава от монотонността на е-операторите следва, че $W_e(\theta(B_q)) \subseteq W_e(\theta(B))$. Тогава $B_{q+1} = W_e(\theta(B_q)) \cup B_q \subseteq B$.

С пълна индукция по n ще докажем, че

$$(\forall n)(n \in B \Rightarrow (\exists q)(n \in B_q)).$$

За $n <= e$ имаме, че $n \in B \iff n \in B\restriction(e+1) = B_0$. Нека сега $n > e$ и да допуснем, че твърдението е вярно за всички $m < n$. От Лема 14.13 следва, че $n \in W_e(\theta(B\restriction n))$. По индукционно предположение имаме, че $B\restriction n \subseteq B_q$ за някое q. Тогава

$$n \in W_e(\theta(B\restriction n)) \subseteq W_e(\theta(B_q)) \subseteq B_{q+1}.$$

Така получихме, че B се представя като граница на редица от разрешими множества, следователно $B \leq_e \emptyset$, т.е. B е полуразрешимо, което доксазва и (2). □

Следствие 14.14. *В* D_e *няма минимални степени.*

Доказателство. Да допуснем, че B е минимално множество. Тогава $B \gneq_e \emptyset$. Ако допуснем, че $B \leq_T \emptyset'$, то по Твърдение 14.3 $\emptyset \lneq_e \theta(B) \lneq_e B$, т.е. B не е минимално. Да вземем оператора θ от Твърдение 14.10. От (1) следва, че $\theta(B) \gneq_e \emptyset$. От (2) пък имаме, че $B \not\leq_e \theta(B)$, иначе $B \equiv_e \emptyset$. Освен това, понеже θ е е-оператор имаме, че $\theta(B) \lneq_e (B)$, което е в противоречие с минималността на B. $\square$

Следствие 14.15. *Полурешетките D_e и D_T не са елементарно еквивалентни, понеже в D_T има минимални степени (Тема 7), а в D_e няма (Тема 14).*

Азбучен указател

Използвана литература

1. А. Дичев И. Сосков, *Теория на програмите*, Издателство на СУ, София, 1998.
2. S. Barry Cooper, *Computability theory*, CRC Press.
3. S. Barry Cooper, *Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions*, Recursion Theory Week, Oberwolfach 1989 (G. E. Sacks K. Ambos-Spies, G. Muller, ed.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990, pp. 57–110.
4. S. B. Cooper M. M. Arslanov, C. T. Chong and Y. Yang, *The minimal e-degree problem in fragments of peano arithmetic*, Annals of Pure and Applied Logic (2005), no. 131, 159–175.