вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Второ контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
16.01.2016 г.

Зад. 1 (4 т.). Да означим $W_a = Dom(\varphi_a)$ и $E_a = Ran(\varphi_a)$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивни функции f и h, за които за всяко a и b:

а) $W_{f(a,b)} = W_a \cap E_b$;

б) $W_{h(a)} = \{x \mid x \geq h(a)\}$.

Зад. 2 (3 т.). Нека A и B са полуразрешими множества, за които също знаем, че $A \cup B$ и $A \cap B$ са разрешими. Докажете, че A и B са разрешими множества.

Зад. 3 (3 т.). Да разгледаме множеството

$$A = \{x \mid W_x \text{ е крайно множество}\}.$$

Докажете, че A не е разрешимо множество (без позоваване на теоремата на Райс-Успенски).

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Второ контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
16.01.2016 г.

Зад. 1 (4 т.). Да означим $W_a = Dom(\varphi_a)$ и $E_a = Ran(\varphi_a)$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивни функции f и h, за които за всяко a и b:

а) $W_{f(a,b)} = E_a \cap W_b$;

б) $W_{h(a)} = \{x \mid x \leq h(a)\}$.

Зад. 2 (3 т.). Нека A и B са полуразрешими множества, за които $A \cap B = \emptyset$. Нека C е разрешимо множество. Нека освен това $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Докажете, че A е разрешимо множество.

Зад. 3 (3 т.). Да разгледаме множеството

$$A = \{x \mid W_x \text{ е безкрайно множество}\}.$$

Докажете, че A не е разрешимо множество (без позоваване на теоремата на Райс-Успенски).

Решения

Задача 1, вариант 1

а) Разгледайте функцията

$$h(a,b,x) \simeq \begin{cases} 0, & !\varphi_a(x) \wedge (\exists z)[\varphi_b(z) \simeq x] \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че тази функция е изчислима, защото можем да представим h по следния начин:

$$h(a,b,x) \simeq O(\Phi_1(a,x) + \mu z[|\Phi_1(b,z) - x| \simeq 0]),$$

където Φ_1 е универсалната функция за изчислимите функции на един аргумент. От S^m_n теоремата знаем, че съществува примитивно рекурсивна функция f, такава че $h(a,b,x) = \varphi_{f(a,b)}(x)$. Заключаваме, че:

$$x \in W_{f(a,b)} \iff !h(a,b,x) \iff x \in W_a \ \&\ x \in E_b.$$

б) Разгледайте изчислимата функция

$$f(u,v,x) \simeq \begin{cases} 0, & x \geq S^1_1(u,v) \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

От теоремата за рекурсивна определимост съществува индекс e, за който

$$(\forall v, x \in \mathbb{N})[\varphi_e(v,x) \simeq f(e,v,x)].$$

Сега прилагаме S^m_n теоремата върху $\varphi_e(v,x)$. Получаваме, че:

$$!\varphi_{S^1_1(e,v)}(x) \iff !\varphi_e(v,x) \iff !f(e,v,x) \iff x \geq S^1_1(e,v).$$

Нека да положим $h(v) = S^1_1(e,v)$. Тогава за произволни x и a:

$$x \in W_{h(a)} \iff x \geq S^1_1(e,a) \iff x \geq h(a).$$

Задача 1, вариант 2

Решава се аналогично.

Задача 2, вариант 1

В тази задача се използва теоремата на Пост, а също и следните факти:

- Обединение на две полуразрешими множества е полуразрешимо множество;
- Сечението на две полуразрешими множества е полуразрешимо множество;
- Обърнете внимание, че не е вярно, че ако $A \cup B$ е полуразрешимо и $A \cap B$ е полуразрешимо, то A и B са полуразрешими. Дайте пример!
- Също така, ако $A \cup B$ е разрешимо множество и B е разрешимо не следва, че A е разрешимо.

Задачата може да се реши по следния начин:

- Имаме, че: $x \in \overline{A} \iff (x \in \overline{A \cup B}) \ \vee\ (x \in B \cap \overline{A \cap B})$. От условието имаме, че множествата $\overline{A \cup B}$, B и $\overline{A \cap B}$ са полуразрешими. Следователно $B \cap \overline{A \cap B}$ е полуразрешимо, защото е сечение на две полуразрешими множества. Понеже обединение на две полуразрешими множества е полуразрешимо, получаваме, че$\overline{A}$ е полуразрешимо множество. По условие имаме, че A е полуразрешимо. От теоремата на Пост следва, че A е разрешимо.
- За множеството B имаме, че: $x \in \overline{B} \iff (x \in \overline{A \cup B}) \ \vee\ (x \in A \ \&\ x \in \overline{A \cap B})$. Разсъждаваме аналогично.

Задача 2, вариант 2

Имаме, че: $x \in \overline{A} \iff x \in \overline{C} \vee x \in B$. Понеже C е разрешимо, то $\overline{C}$ е полуразрешимо. От условието имаме, че B е полуразрешимо и обединение на полуразрешими множества е полуразрешимо множество. Получаваме, че $\overline{A}$ е полуразрешимо. От теоремата на Пост следва, че A е разрешимо, защото по условие A е полуразрешимо.

Задача 3, вариант 1

Да допуснем, че A е разрешимо множество. Да фиксираме индексите a и b, такива че W_a е крайно множество, а W_b е безкрайно. Понеже A е разрешимо, то следната функция е тотална изчислима:

$$f(x) = \begin{cases} b, & W_x \text{ е крайно} \\ a, & W_x \text{ е безкрайно} \end{cases} = \begin{cases} b, & x \in A \\ a, & x \notin A. \end{cases}$$

От Втора теорема за рекурсията на Клини, съществува индекс e, за който $\varphi_{f(e)} = \varphi_e$. Сега ще разгледаме какво представлява множеството W_e. Ако W_e е крайно, то според дефиницията на функцията $f(e) = b$. Тогава $W_e = W_{f(e)} = W_b$ е безкрайно, според избора на b. Този случай е невъзможен. Ако W_e е безкрайно, то според дефиницията на функцията $f(e) = a$. Тогава $W_e = W_{f(e)} = W_a$ е крайно, според избора на a. Този случай също е невъзможен. Получава противоречие с нашето допускане, че A е разрешимо множество.

Задача 3, вариант 1

Доказателството е аналогично, като тук функцията f е дефинирана като:

$$f(x) = \begin{cases} b, & W_x \text{ е крайно} \\ a, & W_x \text{ е безкрайно} \end{cases} = \begin{cases} b, & x \notin A \\ a, & x \in A. \end{cases}$$