вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Писмен изпит по Изчислимост и сложност
10.02.2016 г.

Зад. 1 (0.5 т.). Докаежете, че предикатът

$E(n) =$ броят на единиците в двоичното представяне на n е четен

е примитивно рекурсивен.

Зад. 2 (1.5 т.). Да означим $W_a = Dom(\varphi_a)$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивни функции f и h, за които за всяко a и b:

а) $W_{f(a,b)} = W_a \setminus \{0, 1, \dots, b\}$;

б) $W_{h(a)} = \{h(a)\}$.

Зад. 3 (2.5 т.). Да разгледаме множествата

$$A = \{\langle a, b\rangle \mid !\varphi_a(a) \ \&\ !\varphi_b(b) \ \&\ \varphi_a(a) = \varphi_b(b)\}$$
$$B = \{a \mid |Dom(\varphi_a)| = 2a + 1\}.$$

Отговорете дали множествата A и B са разрешими или полуразрешими. Приложете доказателства към вашите твърдения!

Необходими са Ви 4 точки за оценка 6.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Писмен изпит по Изчислимост и сложност
10.02.2016 г.

Зад. 1 (0.5 т.). Докаежете, че предикатът

$O(n) =$ броят на единиците в двоичното представяне на n е нечетен

е примитивно рекурсивен.

Зад. 2 (1.5 т.). Да означим $W_a = Dom(\varphi_a)$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивни функции f и h, за които за всяко a и b:

а) $W_{f(a,b)} = W_a \cup \{0, 1, \dots, b\}$;

б) $W_{h(a)} = \mathbb{N} \setminus \{h(a)\}$.

Зад. 3 (2.5 т.). Да разгледаме множествата

$$A = \{\langle a, b\rangle \mid !\varphi_a(a) \ \&\ !\varphi_b(b) \ \&\ \varphi_a(a) \neq \varphi_b(b)\}$$
$$B = \{a \mid |Dom(\varphi_a)| = 2a\}.$$

Отговорете дали множествата A и B са разрешими или полуразрешими. Приложете доказателства към вашите твърдения!

Необходими са Ви 4 точки за оценка 6.

Упътвания

Зад. 1. Можем да определим броя на единиците в числото n по следния начин:

$$\sum_{x \leq n} rem(2, qt(2^x, n))$$

Зад. 2. а) Да разгледаме следната изчислима функция

$$F(u, v, z) \simeq \begin{cases} 42, & !\Phi_1(u, z) \ \&\ z > v \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно е, че съществува индекс e, такъв че $\varphi_e(u, v, z) \simeq F(u, v, z)$. Прилагаме S^m_n-теоремата и получаваме, че $\varphi_e(u, v, z) \simeq \varphi_{S^1_2}(e, u, v)(z)$. Да положим

$$f(u, v) \simeq S^1_2(e, u, v).$$

б) Да разгледаме следната изчислима функция

$$H(u, v, z) \simeq \begin{cases} 42, & z = S^1_1(u, v) \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Знаем от теоремата за рекурсивна определимост, че съществува индекс a, за който

$$\varphi_a(v, z) \simeq H(a, v, z).$$

Сега прилагаме S^m_n-теоремата и получаваме, че

$$\varphi_a(v, z) \simeq \varphi_{S^1_1(a,v)}(z) \simeq H(a, v, z).$$

Нека да дефинираме $h(v) = S^1_1(a, v)$. Тогава:

$$W_{h(a)} = Dom(\varphi_{h(a)}) = \{h(a)\}.$$

Зад. 3. а) Ще видим, че A **не е разрешимо** множество. Да допуснем, че A е разрешимо. Но тогава $x \in K \iff \langle x, x\rangle \in A$. Оттук следва, че K е разрешимо, което е противоречие.

Лесно се вижда, че A е **полуразрешимо** множество. Можем да дадем следната дефиниция на полухарактеристичната функция на A:

$$C_A(z) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } |\Phi_1(L(z), L(z)) - \Phi_1(R(z), R(z))|) = 0. \\ \neg!, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) Обърнете внимание, че B **не е индексно множество**, т.е. не можем да използваме Райс-Шапиро. Ще докажем, че $\overline{K} \leq_m B$. За целта да фиксираме примитивно рекурсивна функция κ, за която

$$x \in K \iff (\exists s)[\kappa(x, s) = 0].$$

От това ще следва, че B **не е полуразрешимо** множество. Да разгледаме следната изчислима функция:

$$F(u, v, x) \simeq \begin{cases} 42, & \text{ако } x \leq 2S^1_1(u, v) \vee (\exists s < x)[\kappa(v, s) = 0] \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Знаем от теоремата за рекурсивна определимост, че съществува индекс a, за който

$$\varphi_a(v, x) \simeq F(a, v, x).$$

Нека $h(v) = S^1_1(a, v)$.

$$v \notin K \implies (\forall s)[\kappa(v, s) \neq 0] \implies Dom(\varphi_{h(v)}) = \{0, 1, \dots, 2h(v)\} \implies h(v) \in B$$
$$v \in K \implies (\exists s)[\kappa(v, s) = 0] \implies Dom(\varphi_{h(v)}) \text{ е безкрайно} \implies h(v) \notin B.$$