вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Второ контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
14/01/2017 г.

Зад. 1 (5 точки). Дайте пример за разрешимо множество A, такова че множеството

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid (\forall y \in \mathbb{N})[\Pi(x, y) \in A]\}$$

не е полуразрешимо. Обосновете се!

Зад. 2 (5 точки). На всяко крайно множество от вида $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k\}$ съпоставяме естественото число $v = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \cdots 2^{x_k}$. С D_v ще означаваме крайното множество с код v. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция h, такава че:

$$(\forall v \in \mathbb{N})[D_v = W_{h(v)}].$$

Зад. 3 (5 точки). Докажете, че множеството

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \subseteq \{0, \ldots, x\}\}$$

не е полуразрешимо. (*Забележка*: A не е индексно множество).

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Второ контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
14/01/2017 г.

Зад. 1 (5 точки). Дайте пример за разрешимо множество A, такова че множеството

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid (\forall y \in \mathbb{N})[\Pi(x, y) \in A]\}$$

не е полуразрешимо. Обосновете се!

Зад. 2 (5 точки). На всяко крайно множество от вида $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k\}$ съпоставяме естественото число $v = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \cdots 2^{x_k}$. С D_v ще означаваме крайното множество с код v. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция h, такава че:

$$(\forall v \in \mathbb{N})[D_v = W_{h(v)}].$$

Зад. 3 (5 точки). Докажете, че множеството

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \subseteq \{0, \ldots, x\}\}$$

не е полуразрешимо. (*Забележка*: A не е индексно множество).

Решения

Задача 1

Знаем, че множеството $K = \{x \mid !\varphi_x(x)\}$ е полуразрешимо. Следователно, съществува примитивно рекурсивна функция ρ, такава че $x \in K \iff (\exists y)[\rho(x, y) = 0]$. Това означава, че $x \in \overline{K} \iff (\forall y)[\rho(x, y) \neq 0]$. Да разгледаме множество

$$A = \{\Pi(x, y) \mid \rho(x, y) \neq 0\}.$$

То е разрешимо, защото $u \in A \iff \rho(L(u), R(u)) \neq 0$. Това означава, че $x \in \overline{K} \iff (\forall y)[\Pi(x, y) \in A]$. Тогава за множеството $B = \{x \mid (\forall y \in \mathbb{N})[\rho(x, y) \neq 0]\}$,

$$x \in \overline{K} \iff x \in B.$$

Оттук следва, че B не е полуразрешимо множество.

Задача 2

Знаем, че съществува примитивно рекурсивна функция mem, за която $mem(x, v) = 0$, ако $x \in D_v$ и $mem(x, v) = 1$, ако $x \notin D_v$. Да разгледаме изчислимата функция

$$f(v, x) \simeq \begin{cases} 0, & mem(x, v) = 0 \\ \neg!, & mem(x, v) = 1. \end{cases}$$

Ясно е, че $f(v, x) \simeq \varphi_a(v, x)$, за някое a. Тогава от S_n^m теоремата следва, че $f(v, x) \simeq \varphi_{S_1^1(a,v)}(x)$. Нека $h(v) = S_1^1(a, v)$. Оттук следва, че

$$Dom(\varphi_{h(v)}) = W_{h(v)} = D_v.$$

Задача 3

Първо решение. Да разгледаме функцията

$$f(x, y) \simeq \begin{cases} 0, & x \in K \\ \neg!, & x \notin K. \end{cases}$$

Понеже K е полуразрешимо множество, то f е изчислима. Ясно е, че $f(x, y) \simeq \varphi_a(x, y)$, за някое a. Тогава от S_n^m теоремата следва, че $f(x, y) \simeq \varphi_{S_1^1(a,x)}(y)$. Нека $h(x) = S_1^1(a, x)$. Тогава

$$x \in \overline{K} \implies Dom(\varphi_{h(v)}) = W_{h(v)} = \emptyset \implies W_{h(v)} \subseteq \{0, \ldots, h(v)\} \implies h(v) \in A$$
$$x \in K \implies Dom(\varphi_{h(v)}) = W_{h(v)} = \mathbb{N} \implies W_{h(v)} \not\subseteq \{0, \ldots, h(v)\} \implies h(v) \notin A.$$

Оттук следва, че $\overline{K} \leq_m A$. Тогава ако A е полуразрешимо, то и $\overline{K}$ ще бъде полуразрешимо, което е противоречие.

Второ решение. Това решение е по-общо и тази идея може да се приложи и за други задачи. Да разгледаме функцията

$$f(x, y, z) \simeq \begin{cases} 0, & y \in K \ \vee \ z \leq S_1^1(x, y) \\ \neg!, & \text{иначе}. \end{cases}$$

От теоремата за рекурсивна определимост знаем, че съществува a, такова че: $\varphi_a(y, z) \simeq f(a, y, z)$. Тогава от S_n^m теоремата следва, че $f(a, y, z) \simeq \varphi_{S_1^1(a,y)}(z)$. Нека $h(y) = S_1^1(a, y)$. Тогава

$$y \in \overline{K} \implies Dom(\varphi_{h(y)}) = W_{h(y)} = \emptyset \implies W_{h(v)} = \{0, \ldots, h(v)\} \implies h(v) \in A$$
$$y \in K \implies Dom(\varphi_{h(v)}) = W_{h(v)} = \mathbb{N} \implies W_{h(v)} \not\subseteq \{0, \ldots, h(v)\} \implies h(v) \notin A.$$

Оттук следва, че $\overline{K} \leq_m A$. Тогава ако A е полуразрешимо, то и $\overline{K}$ ще бъде полуразрешимо, което е противоречие.