тема	факултетен номер	група	поток	курс	спец.
1					
Име:					

Писмен изпит по Изчислимост и сложност, 05.02.24

Зад. 1. Докажете, че е примитивно рекурсивна функцията f, определена с условието:

$$\begin{vmatrix} f(0,y) & = y \\ f(x+1,y) & = (x+2)^{f(x,2y)}. \end{vmatrix}$$

Зад. 2. Ще казваме, че тоталната функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е *почти 0*, ако $f(x)\neq 0$ само за краен брой x. Нека $\mathcal{F}_0 = \{f \mid f \text{ е почти } 0\}$. Да дефинираме $\kappa\colon \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathbb{N}^+$ по следния начин:

$$\kappa(f) \;=\; \prod_{x\in\mathbb{N}} p_x^{f(x)}.$$

а) Докажете, че изображението $\kappa\colon \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathbb{N}^+$ е биективно.

Ако $\kappa(f)=a$, ще казваме, че a е *код* на f. Да положим

$$f_a = \begin{cases} \text{функцията с код } a, & \text{ако } a>0 \\ \mathcal{O}, & \text{ако } a=0. \end{cases}$$

б) Докажете, че множеството $\mathcal{F}_0$ има универсална функция.

в) Докажете, че са примитивно рекурсивни предикатите

$$subf(a,b) \iff f_a \subseteq f_b \quad \text{и} \quad sum(a,b,c) \iff \forall x(f_a(x)+f_b(x)=f_c(x)).$$

г) Докажете, че съществува рекурсивна функция h, такава че $h(a)$ е индекс на f_a за всяко $a>0$.

д) **(бонус)** Докажете, че не съществува р.ф. g, такава че

$$\forall a(\varphi_a \in \mathcal{F}_0 \implies g(a) \text{ е код на } \varphi_a).$$

Зад. 3. Нека $\mathcal{A} = \{\varphi_a \mid \varphi_a \text{ е дефинирана в поне две точки}\}$. Докажете, че:

а) проблемът "$\varphi_a \in \mathcal{A}$?" не е разрешим;

б) проблемът "$\varphi_a \in \mathcal{A}$?" е полуразрешим;

в) проблемът "$\varphi_a \notin \mathcal{A}$?" не е полуразрешим.

Успех! $\smile$