тема	факултетен номер	група	поток	курс	спец.
1					
Име:					

Устен изпит по Изчислимост и сложност, 12.02.24

Зад. 1. Нека $\pi\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е биективно изображение.

а) Дефинирайте обратните функции l и r за изображението π.

С индукция по $n \geq 1$ въвеждаме изображението $\pi_n\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\pi_1(x_1) = x_1$$
$$\pi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \pi(x_1, \pi_n(x_2, \dots, x_{n+1})).$$

б) Докажете, че изображението π_n е биективно за всяко $n \geq 1$.

Нека сега е дадено още, че π, l и r са примитивно рекурсивни. Нека $d_1^n, \dots, d_n^n$ са обратните (декодиращите) функции за π_n.

в) Докажете, че $d_1^n, \dots, d_n^n$ също са примитивно рекурсивни.

г) Изразете всяка от функциите d_i^n чрез декодиращите l и r.

д) Докажете, че е примитивно рекурсивна функцията

$$D(i, n, z) = \begin{cases} d_i^n(z), & \text{ако } n \geq 1 \ \&\ 1 \leq i \leq n \\ 0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Зад. 2. а) Дайте определение за ефективност на оператор $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3$.

б) Формулирайте НДУ за ефективност на този оператор.

Кои от изброените оператори са ефективни:

в) $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, като по дефиниция $\Gamma(f)(x) = x + 1$.

г) $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, като по дефиниция $\Gamma(f)(x) \simeq \sum\limits_{z=0}^{x} f(z)$.

д) $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, като по дефиниция

$$\Gamma(f, g)(x) \simeq \begin{cases} \sum\limits_{z=0}^{g(x)} f(z), & \text{ако } !g(x) \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зад. 3. а) Формулирайте твърдения, които са верни за полуразрешимите множества, но не са верни за разрешимите и обратно — които са верни за разрешимите, но не са верни за полуразрешимите множества (колкото повече, толкова по-добре ⌣̈).

б) Дайте доказателство на всяко от твърденията, които сте написали в горната подточка.

Успех! ⌣̈