ИЗПИТ

по Теория на програмите,
тема 1, 1995 г.

1. Дайте определение на на класа на примитивно рекурсивните функции.
(10 точки)

2. Покажете, че функцията

$$rm(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0, \\ [y/x], & \text{ако } x \neq 0 \end{cases}$$

е примитивно рекурсивна.
(20 точки)

3. Кога една функция се нарича *универсална* за класа на едноместните примитивно рекурсивни функции – PR_1?
(10 точки)

4. Покажете, че ако φ е универсална за PR_1, то φ **не** е примитивно рекурсивна. Съществува ли изчислима функция, която да е универсална за PR_1?
(20 точки)

5. Дайте две различни, но еквивалентни определения на понятието полу-разрешимо множество. Докажете тяхната еквивалентност.
(20 точки)

6. Формулирайте и докажете теоремата на Пост.
(20 точки)

7. Формулирайте и докажете теоремата на Райс-Успенски.
(20 точки)

8. Нека са дадени двуместна рекурсивна функция g и едноместна рекурсивна функция r. Нека M е мярка за сложност. Покажете, че съществува рекурсивна функция b, удовлетворяваща $\forall x(b(x) \geqq r(x))$ и такава, че ако $a \in \mathbb{N}$, то при всеки избор на $x > a$,

$$M_a(x) \leqq g(x, b(x)) \Rightarrow M_a(x) \leqq b(x).$$

(30 точки)

9. Нека $E : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е ефективен (изчислим) оператор. Докажете, че за всяка изчислима функция φ,

$$E(\varphi)(x) \simeq y \iff \exists \theta(\theta \subseteq \varphi \wedge \theta \text{ е крайна } \wedge E(\theta)(x) \simeq y).$$

Упътване: Използвайте теоремата на Райс-Шапиро.
(50 точки)

10. Нека A_1 и A_2 са области на Скот. Нека $\{f_r\}$ е монотонно растяща редица от непрекъснати изображения на A_1 в A_2. Докажете, че изображението $h : A_1 \to A_2$, определено чрез равенството $h(a) = \bigcup f_r(a)$, е непрекъснато.
(50 точки)

ИЗПИТ

по Теория на програмите,
тема 2, 1995 г.

1. Формулирайте S_n^m теоремата.
(10 точки)

2. Формулирайте и докажете теоремата за рекурсивната определимост.
(20 точки)

3. Възможно ли е да бъде създаден език за програмиране, на който да се описват само тотални алгоритми и такъв, че за всяка едноместна тотална изчислима функция да има програма на този език? Обосновете отговора си.
(20 точки)

4. Нека означим с K множеството $\{x : x \in W_x\}$. Покажете, че
а) K е полу-разрешимо, но не е разрешимо;
б) Ако A е полуразрешимо подмножество на $\mathbb{N}$, то съществува тотална изчислима функция f, такава че за всяко x, $x \in A \iff f(x) \in K$.
(10 + 20 точки)

5. Формулирайте и докажете теоремата на Райс-Шапиро.
(50 точки)

6. Покажете, че всеки непрекъснат оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е компактен.
(20 точки)

7. Покажете, че всяко непрекъснато изображение в област на Скот има най-малка неподвижна точка.
(20 точки)

8. Покажете пълнотата на операционната семантика на рекурсивните програми с предаване на параметрите по стойност по отношение на денотационната семантика, т.е. включването $D_V(R) \subseteq O_{V_c}(R)$.
(60 точки)

9. Докажете, че всяко монотонно изображение на $\mathbb{N}_\perp^n$ в $\mathbb{N}_\perp$ е непрекъснато.
(20 точки)

У С Т Е Н   И З П И Т

по Теория на програмите, юни 1996 г.

1. Докажете че частично рекурсивните функции са затворени относно триместната операция $\Sigma : (\mathcal{F}_1)^3 \to \mathcal{F}_1$, където

$$\Sigma(\chi, \varphi, \psi)(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ако } \chi(x) \simeq 0, \\ \psi(x) & \text{ако } !\chi(x) > 0, \\ \text{неопределена} & \text{ако } \neg!\chi(x). \end{cases}$$

Покажете, че Σ е ефективен оператор.

(30 точки)

2. Формулирайте и докажете теоремата за рекурсивната определимост.

(30 точки)

3. Нека Γ е ефективен оператор от тип $(n_1, \ldots, n_k \to n)$. Докажете, че съществува ***примитивно рекурсивна*** функция g, такава, че при всеки избор на индекси $a_1, \ldots, a_k$ да имаме

$$\Gamma(\varphi^{n_1}_{a_1}, \ldots, \varphi^{n_k}_{a_k}) = \varphi^{n}_{g(a_1, \ldots, a_k)}.$$

(30 точки)

4. Изведете теоремата на Райс-Успенски като следствие от теоремата на Райс-Шапиро.

(30 точки)

5. Полуразрешимо ли е множеството от всички индекси на крайни функции? Обяснете отговора си.

(10 точки)

6. Формулирайте теоремата на Майхил-Шефердсон.

(5 точки)

7. Нека Γ е ефективен оператор от тип $(n \to n)$. Докажете, че съществува изчислима функция φ, такава, че

а) $\Gamma(\varphi) = \varphi$ и

б) Ако ψ е изчислима функция и $\Gamma(\psi) = \psi$, то $\varphi \subseteq \psi$.

(30 точки)

8. Нека A_1 и A_2 са области на Скот. Дефинирайте подходящо наредба $\subseteq$ и елемент Ω в множеството $(A_1 \to A_2)$ на непрекъснатите изображения на A_1 в A_2, така, че $((A_1 \to A_2), \subseteq, \Omega)$ да бъде област на Скот. Докажете го.

(40 точки)

9. Нека е дадена рекурсивната програма R:

$F(X), where$

$F(X) = \tau(X, F).$

Докажете, че $D_V(R) \subseteq O_V(R)$.

(45 точки)

УСТЕН ИЗПИТ

по Теория на програмите, юни 1998 г.

(Втора версия)

1. Нека A е непразно и полуразрешимо подмножество на $\mathbb{N}$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция g, такава, че A съвпада с областта от стойности на g.

(30 точки)

2. Дайте пример за изчислима функция g, такава, че
а) $Range(g)$ е неразрешимо множество, но графиката на g е разрешима;
б) $Dom(g)$ е неразрешимо множество, но g притежава тотално изчислимо продължение;

(30 точки)

3. Нека $T = \{a : \varphi_a^{(1)}$ е тотална$\}$. Покажете, че $K \leq_m T$, но $T \not\leq_m K$.

(30 точки)

4. Нека $\{\psi_r\}$ е монотонно растяща редица от непрекъснати функции в $\mathbb{N}_\perp$. Нека $\psi = \cup\psi_r$. Направете характеризация на ψ

(40 точки)

5. Нека S е следната стандартна схема:
Input X;
Output X;
begin
0. if T(X) then goto 3 else goto 1;
1. X:= f(X)
2. goto 0;
3. Stop;
end.
Определете R_S. Докажете, че при всеки избор на тип данни $\mathfrak{A}$ от езика $\mathcal{L} = (f;T)$ е в сила включването:

$$\langle R_S, \mathfrak{A}\rangle \subseteq \langle S, \mathfrak{A}\rangle.$$

(50 точки)

6. Нека P е логическа програма. Дефинирайте най-малкия ербранов модел M_P на P и изображението T_P. Покажете, че M_P е най-малката неподвижна точка на T_P.

(40 точки)

7. Формулирайте понятието за транслация на един клас схеми в друг. Дайте примера на Патерсон и Хюит.

(30 точки)