Вариант 1

Писмен Изпит по Дискретни Структури
14/02/2018 г.

Оценката се образува по следния начин: 2 + бр. точки,
Наредени двойки бележим с ъглови скоби, напр. $\langle a, b\rangle$.

Зад. 1. Намерете:
а) (0.25 т.) подмножествата на $\{1, \varnothing, \{2, 3\}\}$
б) (0.25 т.) $\{1, 3, 15\} \setminus \{2, 3, 11\}$
в) (0.25 т.) $\{1, 4\} \times \{2, 4\}$

Решение

а) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{2, 3\}\}$, $\{1, \varnothing\}$, $\{1, \{2, 3\}\}$, $\{\varnothing, \{2, 3\}\}$, $\{1, \varnothing, \{2, 3\}\}$

б) $\{1, 15\}$

в) $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$ $\square$

Зад. 2. (0.75 т.) Намерете броя на решенията на уравнението:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2048$, където $x_1 \geq 100$,
$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$, $x_3 \in \mathbb{N}$ и $x_4 \in \mathbb{N}$.

Решение

Полагаме $x_1 = x_1' + 100$.

Уравнението придобива вида:

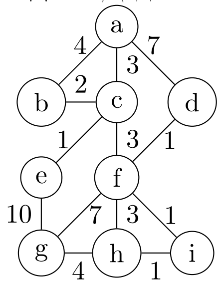
$x_1' + 100 + x_2 + x_3 + x_4 = 2048$

$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 2048 - 100$

$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 1948$

$\binom{1948+(4-1)}{(4-1)} = \binom{1951}{3} = \frac{1951.1950.1949}{3!} = 1\ 235\ 812\ 175$ $\square$

Зад. 3. Даден е следният претеглен неориентиран граф:



а) (0.50 т.) Покажете едно минимално покриващо дърво за този граф.
б) (0.50 т.) Намерете дължините на минималните пътища от връх a до всички останали върхове в графа, използвайки алгоритъма на Дейкстра.

Решение

Използваме алгоритъма на Крускал:

Подреждаме ребрата по тежест, започвайки от най-лекото:

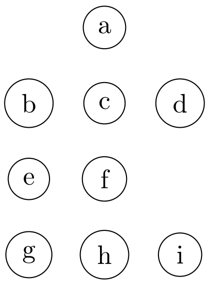
$\{d,f\},\{c,e\},\{f,i\},\{h,i\},$

$\{b,c\},\{c,f\},\{f,h\},\{a,c\},$

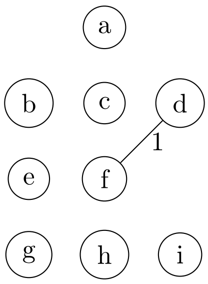
$\{b,a\},\{g,h\},\{a,d\},\{f,g\},$

$\{e,g\}.$

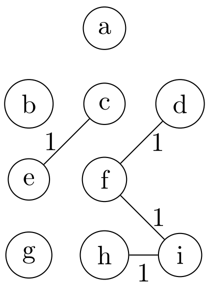
Започваме с 13 дървета с по един връх и без ребра:



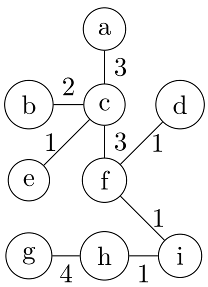
$\{d,f\}$ свързва различни дървета.



Последователно добавяме $\{c,e\}$, $\{f,i\}$, $\{h,i\}$:



След това, последователно: $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, пропускаме $\{f, h\}$, добавяме $\{a, c\}$. После пропускаме $\{b, a\}$, добавяме $\{g, h\}$ и пропускаме останалите до края.



б) Прилагаме алгоритъма на Дейкстра, интересуват ни само дължините на пътищата, започвайки от a:

$Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$dist = [a : 0, b : \infty, c : \infty, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 1:

Избираме $a \in Q$ с най-малко $dist$, $Q = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Съседите на a в Q са: b, c, d.

1.1. b: $alt = 0 + 4 = 4$, $4 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : \infty, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

1.2. c: $alt = 0 + 3 = 3$, $3 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

1.2. d: $alt = 0 + 7 = 7$, $7 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 2: c

$Q = \{b, d, e, f, g, h, i\}$

2.1. b: $alt = 3 + 2 = 5$, $5 \not< 4$

2.2. e: $alt = 3 + 1 = 4$, $4 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

2.3. f: $alt = 3 + 3 = 6$, $6 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 3: b

$Q = \{d, e, f, g, h, i\}$

Итерация 4: e

$Q = \{d, f, g, h, i\}$

4.1. g: $alt = 4 + 10 = 14$, $14 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 14, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 5: f

$Q = \{d, g, h, i\}$

5.1. d: $alt = 6 + 1 = 7$, $7 \not< 7$

5.2. g: $alt = 6 + 7 = 13$, $13 < 14$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 13, h : \infty, i : \infty]$

5.3. h: $alt = 6 + 3 = 9$, $9 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 13, h : 9, i : \infty]$

5.4. i: $alt = 6 + 1 = 7$, $7 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 13, h : 9, i : 7]$

Итерация 6: d

$Q = \{g, h, i\}$

Итерация 7: i

$Q = \{g, h\}$

7.1. h: $alt = 7 + 1 = 8$, $8 < 9$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 13, h : 8, i : 7]$

Итерация 8: h

$Q = \{g\}$

8.1. g: $alt = 8 + 4 = 12$, $12 < 13$

$dist = [a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 12, h : 8, i : 7]$

Итерация 9: g

$Q = \varnothing$

Край, резултат:

$dist = [\mathbf{a : 0, b : 4, c : 3, d : 7, e : 4, f : 6, g : 12, h : 8, i : 7}]$ $\square$

Зад. 4. Нека A е множество, а $S \subseteq A \times A$ и $R \subseteq A \times A$ са бинарни релации над A. Нека:
(1) $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a\ S\ b)$ (т.е. всеки елемент на A има S-наследник)
(2) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x\ R\ y) \leftrightarrow (\exists z \in A)((x\ S\ z)\ \&\ (y\ S\ z)))$ (т.е. x и y са в релация R точно тогава, когато имат общ S-наследник)
Докажете, че:
(а) (0.25 т.) R е симетрична.
(б) (0.50 т.) R е рефлексивна.

Доказателство

а) Нека $x \in A$, $y \in A$ и $(x\ R\ y)$. Тогава от условието за R съществува общ S-наследник $z \in A$ на x и y, т.е. съществува $z \in A$, такова че $(x\ S\ z)$ и $(y\ S\ z)$. Но тогава y и x също имат общ S-наследник (например z), следователно $(y\ R\ x)$.

б) Нека $x \in A$. Тогава от условието за S съществува $b \in A$, такова че $(x\ S\ b)$. Следователно x има общ S-наследник със себе си и оттук $(x\ R\ x)$. $\square$

Зад. 5. Да разгледаме множеството $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$.
а) (0.40 т.) Посочете всички двойки $\langle X, Y\rangle$ от елементи X и Y на A, такива че **няма** инекция $f : X \to Y$.
б) (0.35 т.) Напишете всички редици, съдържащи всички елементи на A без повторения, и такива че всеки път, когато X е преди Y, **има** инекция $f : X \to Y$.

Решение

а) Елементите на A: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ са изброими безкрайни множества, а $\mathbb{R}$ е неизброимо множество. Следователно това са всички наредени двойки от елементи на A със желаното свойство:

$\langle \mathbb{R}, \mathbb{N}\rangle, \langle \mathbb{R}, \mathbb{Q}\rangle, \langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}\rangle$

б) Това са всички редици, общо $3! = 6$ на брой:

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

2. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

3. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$

4. $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

5. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

6. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ $\square$

Обяснение: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ са равномощни и строго по-малки по мощтност от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Вариант 2

Писмен Изпит по Дискретни Структури
14/02/2018 г.

Оценката се образува по следния начин: 2 + бр. точки,
Наредени двойки бележим с ъглови скоби, напр. $\langle a, b\rangle$.

Зад. 1. Намерете:
а) (0.25 т.) подмножествата на $\{\varnothing, 3, \{1, 2\}\}$
б) (0.25 т.) $\{2, 4, 16\} \setminus \{2, 5, 9\}$
в) (0.25 т.) $\{1, 2\} \times \{2, 3\}$

Решение

а) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{3\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\{\varnothing, 3\}$, $\{\varnothing, \{1, 2\}\}$, $\{3, \{1, 2\}\}$, $\{\varnothing, 3, \{1, 2\}\}$

б) $\{4, 16\}$

в) $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

Зад. 2. (0.75 т.) Намерете броя на решенията на уравнението:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1024$, където $x_2 \geq 99$,
$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$, $x_3 \in \mathbb{N}$ и $x_4 \in \mathbb{N}$.

Решение

Полагаме $x_2 = x_2' + 99$.

Уравнението придобива вида:

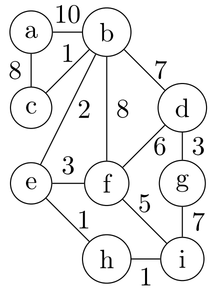
$x_1 + x_2' + 99 + x_3 + x_4 = 1024$

$x_1 + x_2' + x_3 + x_4 = 1024 - 99$

$x_1 + x_2' + x_3 + x_4 = 925$

$\binom{925+(4-1)}{(4-1)} = \binom{928}{3} = \frac{928.927.926}{3!} = 132\ 766\ 176$ $\square$

Зад. 3. Даден е следният претеглен неориентиран граф:



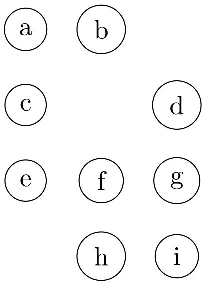
а) (0.50 т.) Покажете едно минимално покриващо дърво за този граф.
б) (0.50 т.) Намерете дължините на минималните пътища от връх а до всички останали върхове в графа, използвайки алгоритъма на Дейкстра.

Решение

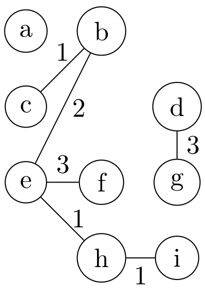
Използваме алгоритъма на Крускал:

Подреждаме ребрата по тежест, започвайки от най-лекото:

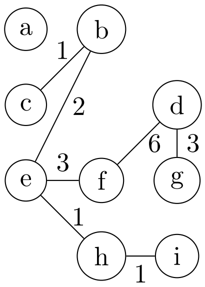
$\{c, b\}$, $\{e, h\}$, $\{h, i\}$, $\{b, e\}$, $\{d, g\}$, $\{f, e\}$, $\{f, i\}$, $\{d, f\}$, $\{b, d\}$, $\{g, i\}$, $\{a, c\}$, $\{b, f\}$, $\{a, b\}$



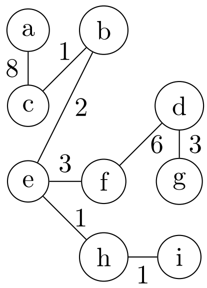
Добавяме последователно: $\{c, b\}$, $\{e, h\}$, $\{h, i\}$, $\{b, e\}$, $\{d, g\}$, $\{f, e\}$.



Пропускаме $\{f, i\}$, добавяме $\{d, f\}$, пропускаме $\{b, d\}$, $\{g, i\}$.



Добавяме $\{a, c\}$ и пропускаме останалите до края.



б) Прилагаме алгоритъма на Дейкстра, интересуват ни само дължините на пътищата, започвайки от a:

$Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$dist = [a : 0, b : \infty, c : \infty, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 1: a

$Q = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$

1.1. b: $alt = 0 + 10 = 10$, $10 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 10, c : \infty, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

1.2. c: $alt = 0 + 8 = 10$, $8 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 10, c : 8, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 2: c

$Q = \{b, d, e, f, g, h, i\}$

2.1. b: $alt = 8 + 1 = 9$, $9 < 10$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : \infty, e : \infty, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 3: b

$Q = \{d, e, f, g, h, i\}$

3.1. e: $alt = 9 + 2 = 11$, $11 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : \infty, e : 11, f : \infty, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

3.2. f: $alt = 9 + 8 = 17$, $17 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : \infty, e : 11, f : 17, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

3.3. d: $alt = 9 + 7 = 16$, $16 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 17, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

Итерация 4: e

$Q = \{d, f, g, h, i\}$

4.1. f: $alt = 11 + 3 = 14$, $14 < 17$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 14, g : \infty, h : \infty, i : \infty]$

4.2. h: $alt = 11 + 1 = 12$, $12 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 14, g : \infty, h : 12, i : \infty]$

Итерация 5: h

$Q = \{d, f, g, i\}$

5.1. i: $alt = 12 + 1 = 13$, $13 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 14, g : \infty, h : 12, i : 13]$

Итерация 6: i

$Q = \{d, f, g\}$

6.1. f: $alt = 13 + 5 = 18$, $18 \not< 14$

6.2. g: $alt = 13 + 7 = 20$, $20 < \infty$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 14, g : 20, h : 12, i : 13]$

Итерация 7: f

$Q = \{d, g\}$

7.1. d: $alt = 14 + 6 = 20$, $20 \not< 16$

Итерация 8: d

$Q = \{g\}$

8.1. g: $alt = 16 + 3 = 19$, $19 < 20$

$dist = [a : 0, b : 9, c : 8, d : 16, e : 11, f : 14, g : 19, h : 12, i : 13]$

Итерация 9: g

$Q = \varnothing$

Край, резултат:

$dist = [\mathbf{a : 0}, \mathbf{b : 9}, \mathbf{c : 8}, \mathbf{d : 16}, \mathbf{e : 11}, \mathbf{f : 14}, \mathbf{g : 19}, \mathbf{h : 12}, \mathbf{i : 13}]$ $\square$

Зад. 4. Нека A е множество, а $S \subseteq A \times A$ и $R \subseteq A \times A$ са бинарни релации над A. Нека:
(1) $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(b\ S\ a)$ (т.е. всеки елемент на A има S-предшественик)
(2) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x\ R\ y) \leftrightarrow (\exists z \in A)((z\ S\ x)\ \&\ (z\ S\ y)))$ (т.е. x и y са в релация R точно тогава, когато имат общ S-предшественик)
Докажете, че:
(а) (0.25 т.) R е симетрична.
(б) (0.50 т.) R е рефлексивна.

Доказателство

а) Нека $x \in A$, $y \in A$ и $(x\ R\ y)$. Тогава от условието за R съществува общ S-предшественик $z \in A$ на x и y, т.е. съществува $z \in A$, такова че $(z\ S\ x)$ и $(z\ S\ y)$. Но тогава y и x също имат общ S-предшественик (например z), следователно $(y\ R\ x)$.

б) Нека $x \in A$. Тогава от условието за S съществува $b \in A$, такова че $(b\ S\ x)$. Следователно x има общ S-предшественик със себе си и оттук $(x\ R\ x)$. $\square$

Зад. 5. Да разгледаме множеството $A = \{\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.
а) (0.40 т.) Посочете всички двойки $\langle X, Y \rangle$ от елементи X и Y на A, такива че **няма** инекция $f : X \to Y$.
б) (0.35 т.) Напишете всички редици, съдържащи всички елементи на A без повторения, и такива че всеки път, когато X е преди Y, **има** инекция $f : X \to Y$.

Решение

а) Елементите на A: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ са изброими безкрайни множества, а $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ е неизброимо множество. Следователно това са всички наредени двойки от елементи на A със желаното свойство:

$\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N} \rangle, \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{Z} \rangle, \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{Q} \rangle$

б) Това са всички редици, общо $3! = 6$ на брой:

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

2. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

3. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

4. $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

5. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

6. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\square$

Обяснение: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ са равномощни и строго по-малки по мощност от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.