Упътванията са за вариант 1. За вариант 2, задачите се решават аналогично (за 1а, 2а и 2б само трябва да се сменят местата на буквите от формалните азбуки, а за 1б трябва да се промени финалното състояние).

Упътване към задача 1а:

Да разгледаме езика L, който се описва с регулярния израз $(a+b)^+ab^+a^\star$. Нека първо да разпишем регулярния израз:

$$\begin{aligned}(a+b)^+ab^+a^\star &= (a+b)(a+b)^\star ab^+a^\star \\ &= a(a+b)^\star ab^+a^\star + b(a+b)^\star ab^+a^\star.\end{aligned}$$

Понеже $\varepsilon \notin L$, началното състояние на автомата няма да бъде финално. Лесно се съобразява, че:

$$\begin{aligned}a^{-1}(L) &= \mathcal{L}((a+b)^\star ab^+a^\star) \overset{\text{деф}}{=} L_2 \\ b^{-1}(L) &= \mathcal{L}((a+b)^\star ab^+a^\star) = L_2.\end{aligned}$$

Ясно е, че $\varepsilon \notin L_2$. Понеже $ab \in L_2$, но $ab \notin L$, то следва, че езикът $L_2 \neq L$. Това означава, че на L_2 ще съответства ново състояние в автомата.

Сега да разпишем регулярния израз за езика L_2:

$$\begin{aligned}(a+b)^\star ab^+a^\star &= ab^+a^\star + (a+b)(a+b)^\star ab^+a^\star \\ &= ab^+a^\star + a(a+b)^\star ab^+a^\star + b(a+b)^\star ab^+a^\star.\end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че:

$$\begin{aligned}a^{-1}(L_2) &= \mathcal{L}(b^+a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star) \overset{\text{деф}}{=} L_3 \\ b^{-1}(L_2) &= \mathcal{L}((a+b)^\star ab^+a^\star) = L_2.\end{aligned}$$

Понеже $\varepsilon \notin L_3$, то на L_3 ще съответства нефинално състояние. Нека все пак да се убедим, че L_3 е език различен от L и L_2. Това е лесно да се съобрази, защото $b \in L_3$, но $b \notin L_2$ и $b \notin L$.

Следващата стъпка е да разпишем регулярния израз за L_3:

$$\begin{aligned}b^+a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star &= bb^\star a^\star + ab^+a^\star + (a+b)(a+b)^\star ab^+a^\star \\ &= bb^\star a^\star + ab^+a^\star + a(a+b)^\star ab^+a^\star + b(a+b)^\star ab^+a^\star.\end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че:

$$\begin{aligned}a^{-1}(L_3) &= \mathcal{L}(b^+a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star) = L_3 \\ b^{-1}(L_3) &= \mathcal{L}(b^\star a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star) \overset{\text{деф}}{=} L_4\end{aligned}$$

Лесно е да се убедим, че на езика L_4 ще съответства ново състояние в автомата, защото $\varepsilon \in L_4$, но $\varepsilon \notin L$, $\varepsilon \notin L_2$ и $\varepsilon \notin L_3$. Ясно е също така, че състоянието, което съответства на L_4 ще бъде финално.

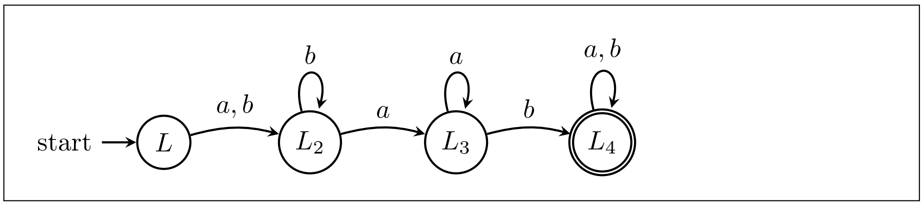
Сега трябва да разпишем регулярния израз за L_4:

$$\begin{aligned}b^\star a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star &= a^\star + bb^\star a^\star + ab^+a^\star + (a+b)(a+b)^\star ab^+a^\star \\ &= \varepsilon + aa^\star + bb^\star a^\star + ab^+a^\star + a(a+b)^\star ab^+a^\star + b(a+b)^\star ab^+a^\star.\end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че:

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(L_4) &= a^\star + b^+a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star \\
&= b^\star a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star = L_4 \\
b^{-1}(L_4) &= b^\star a^\star + (a+b)^\star ab^+a^\star = L_4.
\end{aligned}
$$

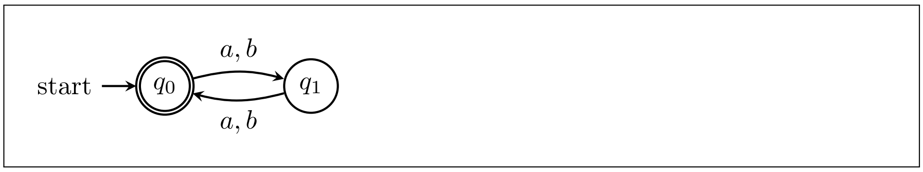
Не получаваме нови езици, следователно вече сме готови с намирането на минималния автомат за езика L.



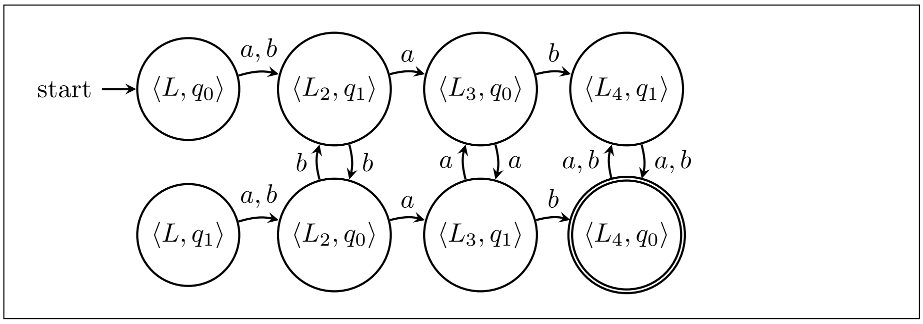
$\square$

Упътване към задача 1б:

Използваме следния автомат за езика $\{\alpha \in \{a,b\}^\star \mid |\alpha| \text{ е четно число}\}$



Построяваме декартовото произведение на двата автомата, според изучаваната конструкция:



$\square$

Упътване към задача 2а:

Езикът L се описва със следния регулярен израз (изпускайки знака за конкатенация): $b^+cc^+(a+b)^\star$. Или еквивалентно: $bb^\star ccc^\star(a+b)^\star$. $\square$

Упътване към задача 2б:

Ще използваме лемата за покачването в контрапозиция.

($\forall$) Нека $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (p е произволно положително естествено число).

($\exists$) Нека $w = a^p cca^p$, $|w| \geq p$ (взимаме конкретна дума с дължина поне p). Така ако положим $\beta = a^p$, то $\beta \in \{a, b\}^\star$ и w се представя като $w = \beta^1 \cdot c^2 \cdot \beta^R$ и оттук $w \in M$.

($\forall$) Нека $x, y, z \in \{a, b, c\}^\star$, такива че $w = x \cdot y \cdot z$, $|y| \geq 1$, $|xy| \leq p$.

От по-горното, при избраната дума w, $xy = a^{|xy|}$ и следователно $y = a^m$ за някое число $m \geq 1$ и $m \leq p$.

($\exists$) Нека сега $i = 0$. Сега $x \cdot y^i \cdot z = a^{p-m}c^2a^p$. В тази дума броят на буквите преди първото срещане на c е по-малък от броя на буквите след второто срещане на c. Следователно не съществуват дума $\gamma \in \{a, b\}^\star$ и $n, k \in \mathbb{N}$, такива че $n \geq 1, k \geq 2$ и $a^{p-m}c^2a^p = \gamma^n \cdot c^k \cdot \gamma^R$. Оттук $x \cdot y^i \cdot z = a^{p-m}c^2a^p \notin M$.

Заключаваме, че M не е регулярен език. $\square$