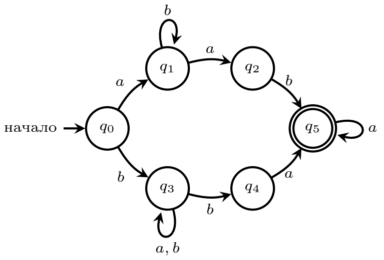
вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Второ контролно по ЕАИ
05/06/2021 г.

Зад. 1. Да разгледаме крайния автомат $\mathcal{A}$ изобразен като:



а) Постройте граматика за $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

б) Постройте граматика за езика $(baa)^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$.

в) Вярно ли е, че езикът $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \{a^n \cdot b^k \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$ е регулярен? Обосновете отговора си!

Зад. 2. Да разгледаме езика

$$L = \{\alpha\sharp\beta\sharp\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \{a,b\}^\star \ \& \ 2|\alpha| + 3|\gamma| = |\beta|\}.$$

а) Докажете, че L не е регулярен език.

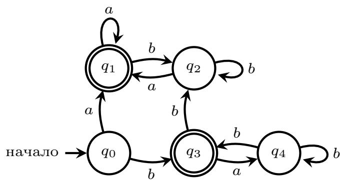
б) Докажете, че L е безконтекстен език.

Успех! ☠

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Второ контролно по ЕАИ
05/06/2021 г.

Зад. 1. Да разгледаме крайния автомат $\mathcal{A}$ изобразен като:



а) Постройте граматика за $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

б) Постройте граматика за езика $(bab)^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$.

в) Вярно ли е, че езикът $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \{b^n \cdot a^k \cdot b^n \mid n \geq 1, k \geq 1\}$ е регулярен? Обосновете отговора си!

Зад. 2. Да разгледаме езика

$$L = \{\alpha\sharp\beta\sharp\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \{a,b\}^\star \ \& \ 3|\alpha| + 2|\gamma| = |\beta|\}.$$

а) Докажете, че L не е регулярен език.

б) Докажете, че L е безконтекстен език.

Успех! ☠

Задача 1 (упътване)

а) Примерна граматика за вариант 1:

$$A_0 \to aA_1 \mid bA_3, \ A_1 \to bA_1 \mid aA_2,$$
$$A_2 \to bA_5 \mid b, \ A_3 \to aA_3 \mid bA_3 \mid bA4,$$
$$A_4 \to aA_5 \mid a, \ A_5 \to aA_5 \mid a.$$

Началната променлива е A_0. (На състоянието q_i отговаря променливата A_i.) Граматиката за вариант 2 можем да построим по аналогичен начин.

б) Тук най-лесно е първо да преобразуваме автомата $\mathcal{A}$ в автомат за $(baa)^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$. Това може да направим като променим началните състояния на автомата да бъдат състоянията от множеството $\Delta^*(S_\mathcal{A}, baa)$, където $S_\mathcal{A}$ е множеството от начални състояния на A. Тогава за вариант 1 ще имаме, че същата граматика като в а), но началната променлива ще бъде A_3. За вариант 2 ще вземем граматиката от а) и ще добавим нова начална променлива S и правилата $S \to A_3 \mid A_4$.

Алтернативно, може да се разгледа регулярен израз за езика на автомата, по който лесно да се построи граматика чрез стандартни конструкции.

в) (решение за Вар. 2) Нека означим $L = \{b^n \cdot a^k \cdot b^n \mid n \geq 1, k \geq 1\}$.

Същественото в задачата е, че езикът L не е регулярен. Често срещана грешка е разсъждението, че щом регулярните езици са затворени относно операцията сечение и езикът L не е регулярен, то сечението на тези два езика ще бъде нерегулярен език.

Това не винаги е така: $L \cap \emptyset = \emptyset$, а както знаем $\emptyset$ е регулярен език. (Сходното твърдение, че сечението на регулярен с нерегулярен език винаги е регулярен език, също може да се опровергае по сходен начин: $L \cap \Sigma^* = L$)

В такива случаи е необходимо по-внимателно да се изследва структурата на езиците и да се съобрази какво точно представлява сечението им. За тази задача ключовото наблюдение е, че ако разгледаме пътищата в автомата, определени от думите в езика L, само краен брой от тях ще ни заведат във финално състояние.

Това можем да направим систематично като разгледаме следните 2 случая за дума $\alpha \in L, \alpha = b^n \cdot a^k \cdot b^n$:

- Ако $n = 1$, т.е. $\alpha = b \cdot a^k \cdot b$: понеже $\Delta^*(q_0, b) = q_3$, да разгледаме какви са възможностите за $\Delta^*(q_3, a^k)$.

  При $k = 1$ отиваме в състоянието q_4, от което следвайки остатъкът от думата $\alpha = bab$, приключваме в състоянието $q_3 \in F_\mathcal{A}$. Тоест, при $n = 1$ и $k = 1$ имаме $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap L$.

  При $k \geq 2$ получаваме $\Delta^*(q_3, a^k) = \emptyset$, поради липсата на дефинирани преходи от състояние q_4 с буквата a. Така няма път в автомата, определен от думата α, и получаваме $\alpha \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap L$.

- Ако $n \geq 2$: тогава $\Delta^*(q_0, b^n) = q_2$. Също така можем да съобразим, че $\Delta^*(q_2, a^k) = q_1$ и $\Delta^*(q_1, b^k) = q_2$. Така в този случай, каквито и да са числата n и k, в автомата ще има единствен път, определен от думата α, и този път ще завършва в състоянието $q_2 \notin F_\mathcal{A}$. Тоест $\alpha \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Така окончателно виждаме, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap L = \{bab\}$. Това е краен език, а значи и регулярен.

Задача 2 (упътване)

Да разгледаме вариант 1, като задачата на вариант 2 се решава аналогично.

а) Можем да приложим контрапозиция на лемата за покачването.

- (∀) Да разгледаме произволно $p \geq 1$.
- (∃) Да фиксираме думата $\alpha = a^p\sharp b^{2p}\sharp \in L$. (Тук $\gamma = \varepsilon$). Ясно е, че $|\alpha| \geq p$.
- (∀) Да разгледаме разбиване на думата α като $\alpha = xyz$, $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Понеже $|xy| \leq p$ е ясно, че $y = a^\ell$, за някое $\ell \geq 1$.
- (∃) Да фиксираме $i = 0$. Съобразете, че $xy^0z = a^{p-\ell}\sharp b^{2p}\sharp \notin L$. (Тук можем да вземем всяко $i \neq 1$.)

Друг подход, с който можем да докажем, че L не е регулярен език е като приложим теоремата на Майхил-Нероуд. Да допуснем, че L е регулярен. Тогава $L_1 = L \cap \mathcal{L}(a^\star\sharp a^\star\sharp a^\star)$ също ще бъде регулярен и следователно ще има крайно много класове на еквивалентност относно релацията на Майхил-Нероуд. Нека сега разгледаме произволни числа $m < \ell$. Тогава $(a^m)^{-1}(L_1) \neq (a^\ell)^{-1}(L_1)$, защото думата $\sharp a^{2m}\sharp \in (a^m)^{-1}(L_1)$, но $\sharp a^{2m}\sharp \notin (a^\ell)^{-1}(L_1)$. Така достигаме до противоречие, защото L_1 има безкрайно много класове на еквивалентност.

б) Съобразете, че можем да преставим езика L като $L = L_1 \cdot L_2$, където $L_1 = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \ \& \ 2|\alpha| = |\beta|\}$ и $L_2 = \{\beta\sharp\gamma \mid \beta, \gamma \in \{a,b\}^\star \ \& \ 3|\gamma| = |\beta|\}$. Понеже безконтекстните езици са затворени относно операцията конкатенация, достатъчно е да докажете, че L_1 и L_2 са безконтекстни езици. Да разгледаме граматиката G_1 с начална променлива S_1 и правила $S_1 \to XS_1XX \mid \sharp$, $X \to a|b$. Аналогично, да разгледаме граматиката G_2 с начална променлива S_2 и правила $S_2 \to XXXS_2X \mid \sharp$, $X \to a|b$. Съобразете, че $\mathcal{L}(S_1) = \{a,b\} \cdot \mathcal{L}(S_1) \cdot \{a,b\}^2$ и $\mathcal{L}(S_2) = \{a,b\}^3 \cdot \mathcal{L}(S_2) \cdot \{a,b\}$. Сега вече лесно можем да докажем, че $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$.