

Нека фиксираме азбуката $\Sigma = \{a, b\}$. За произволен език $L \subseteq \Sigma^*$ дефинираме $\text{коп}(L) = \{ww : w \in L\}$.

- (1) Да се намери безкраен език $L_1 \subseteq \Sigma^*$, за който $\Sigma^* \setminus L_1$ също е безкраен, със свойството, че $\text{коп}(L_1)$ е регулярен.
- (2) Да се намери регулярен език L_2 , такъв че $\text{коп}(L_2)$ не е регулярен.
- (3) Да се докаже, че $\text{коп}(L_2)$ не е регулярен.

Примерно решение и критерии за оценяване

- (1) Да положим $L_1 = (aa)^*$. Тъй като думите от вида a^{2n} са от L_1 , то L_1 е безкраен. Тъй като думите от вида a^{2n+1} са от езика $\Sigma^* \setminus L_1$, то $\Sigma^* \setminus L_1$ също е безкраен. Освен това

$$\begin{aligned}\text{коп}(L_1) &= \{ww : w \in (aa)^*\} \\ &= \{a^{2n}a^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{a^{4n} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= (aaaa)^*\end{aligned}$$

Следователно $\text{коп}(L_1)$ е регулярен. **(2 точки)**

- (2) Нека положим $L_2 = a^*b$. Очевидно е, че L_2 е регулярен език, тъй като може да бъде представен чрез регулярен израз. Ще докажем, че $\text{коп}(L_2)$ не е регулярен. **(2 точки)**
- (3) За езика L_2 имаме следното:

$$\begin{aligned}\text{коп}(L_2) &= \{ww : w \in a^*b\} \\ &= \{a^nba^nb : n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

За да докажем, че $\text{коп}(L_2)$ не е регулярен, ще приложим критерия за проверка за нерегулярност на език, който имаме като следствие от лемата за разрастване (покачване) за регулярни езици.

(v) Разглеждаме произволно естествено число $p \geq 1$.

(э) Избираме дума $s = a^pba^pb \in \text{коп}(L_2)$. Имаме свойството, че $|s| = p + 1 + p + 1 \geq p$. **(1 точка)**

(v) Разглеждаме произволно разбиване на думата s на три части като $s = xyz$ със свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Тъй като $|xy| \leq p$, то xy може да включва само символи a от началото на думата a^pba^pb . Понеже $|y| \geq 1$, то $y = a^k$ за някое $k \geq 1$ и обхваща букви a от първата половина на a^pba^pb . **(2 точки)**

(э) Остава да посочим естествено число i , за което $xy^iz \notin \text{коп}(L_2)$. Нека разгледаме думата $xy^0z = xz = a^{p-k}ba^pb$. Остава да проверим, че $xy^0z \notin \text{коп}(L_2)$. За да бъде $xz \in \text{коп}(L_2)$, трябва $xz = ww$ за някоя дума $w \in L_2$. Това означава, че $xz = a^mba^mb$ за някое $m \geq 0$. Следователно $a^{p-k}ba^pb = a^mba^mb$, откъдето $p - k = m$ и $p = m$. Това означава, че $p - k = p$, което е противоречие, защото $k > 0$. Заклучаваме, че $xy^0z \notin \text{коп}(L_2)$. **(3 точки)**