

Ще казваме, че думата x е **същински префикс** на y , ако за някоя непразна дума z е изпълнено $xz = y$. За кой да е език L от крайна азбука Σ да дефинираме:

$$\begin{aligned}\text{преф}(L) &= \{w \in L : w \text{ има същински префикс от } L\} \\ \text{непреф}(L) &= \{w \in L : w \text{ няма същински префикс от } L\}\end{aligned}$$

- (1) Докажете, че ако L е регулярен, то $\text{преф}(L)$ е регулярен.
- (2) Докажете, че ако L е регулярен, то $\text{непреф}(L)$ е регулярен.

Примерно решение и критерии за оценяване

- (1) Трябва да докажем, че ако L е регулярен, то $\text{преф}(L)$ е регулярен. Ще покажем, че $\text{преф}(L) = L \cap (L\Sigma^*)$.

Нека $w \in \text{преф}(L)$. По дефиниция, $w \in L$ и w има същински префикс от L . Това означава, че съществува дума $x \in L$ и непразна дума z , такива че $xz = w$. Тъй като z е непразна, можем да я запишем като $z = az'$, където $a \in \Sigma$ и $z' \in \Sigma^*$. Следователно $w = xaz'$, където $x \in L$, $a \in \Sigma$ и $z' \in \Sigma^*$. Това означава, че $w \in L\Sigma^*$. Тъй като също така $w \in L$, то $w \in L \cap (L\Sigma^*)$.

Обратно, нека $w \in L \cap (L\Sigma^*)$. Тогава $w \in L$ и $w \in L\Sigma^*$. От второто условие следва, че $w = xaz'$ за някои $x \in L$, $a \in \Sigma$ и $z' \in \Sigma^*$. Тогава x е същински префикс на w и $x \in L$. Следователно $w \in \text{преф}(L)$.

Така показахме, че $\text{преф}(L) = L \cap (L\Sigma^*)$. Тъй като L е регулярен по условие, а в израза $L \cap (L\Sigma^*)$ се използват само операции запазващи регулярността, то $\text{преф}(L)$ е регулярен. **(7 точки)**

- (2) Трябва да докажем, че ако L е регулярен, то $\text{непреф}(L)$ е регулярен. Ще покажем, че $\text{непреф}(L) = L \setminus (L\Sigma^*)$.

По дефиниция, $\text{непреф}(L) = \{w \in L : w \text{ няма същински префикс от } L\}$. От друга страна, в първата част на доказателството показахме, че $\text{преф}(L) = L \cap (L\Sigma^*)$. Това означава, че $\text{преф}(L)$ съдържа точно тези думи от L , които имат същински префикс от L . Следователно, $\text{непреф}(L) = L \setminus \text{преф}(L) = L \setminus (L \cap (L\Sigma^*)) = L \setminus (L\Sigma^*)$.

Тъй като L е регулярен по условие, то $L\Sigma^*$ също е регулярен, както показахме в първата част. Разликата на два регулярни езика е регулярен език. Следователно $\text{непреф}(L) = L \setminus (L\Sigma^*)$ е регулярен. **(5 точки)**