М.Е.С.И.

20 май 2022 г.

1 Увод

- Машини на Тюринг
- Разрешими и полуразрешими езици
- Сложностни класове PSPACE, NPSPACE, P, NP и други.
- Сводимости между проблеми: $\leq_m$, $\leq_m^{\mathtt{P}}$ и $\leq_m^{\mathtt{L}}$.

[Pap94, стр. 47] **Теорема 1.** Ако L се разрешава от недетерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{N}$ за време $f(n)$, то L се разрешава от трилентова детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{M}$ за време $\mathcal{O}(c^{f(n)})$, където константата c зависи от $\mathcal{N}$.

2 Двупосочни автомати или защо писането е важно

Определение 1. Двапосочен автомат е машина на Тюринг

$$\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, F, B \rangle,$$

за която $\$, \# \in \Gamma \setminus \Sigma$ и всеки преход е от вида $t = \langle (p, a), (q, a, d) \rangle$, тоест буквите на лентата не се променят.

Определение 2. Език на двупосочен автомат $\mathcal{M}$ е:

$$L_{2way}(\mathcal{M}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists f \in F(\langle \varepsilon, s, \#\alpha\$ \rangle \Rightarrow_M^* \langle \#\alpha\$, f, \varepsilon \rangle\}.$$

Теорема 2. Класът от езиците, разпознавани от двупосочни автомати е точно класът от регулярни езици.

3 Критерий за разрешимост

[HU79] Нека $\mathscr{S}$ е множество от полуразрешими езици над фиксирана азбука Σ. Например,

$$\mathscr{S} = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е регулярен език}\}.$$

Ще казваме, че $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. $\mathscr{S}$ е **тривиално свойство**, ако $\mathscr{S} = \emptyset$ или $\mathscr{S}$ съдържа точно всички полуразрешими езици. Нека разгледаме изброимото множество от машини на Тюринг, които разпознават езиците от $\mathscr{S}$. Ще представим това множество като език от кодовете на тези машини на Тюринг, т.е.

$$\mathtt{Ind}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \in \mathscr{S}\}.$$

[Pap94, стр. 62] **Теорема 3** (Райс)**.** За всяко нетривиално свойство $\mathscr{S}$ на полуразрешимите езици, $\mathtt{Ind}(\mathscr{S})$ е неразрешимо.

4 Критерий за полуразрешимост

Твърдение 1. Съществуват следните функции:

- тотална изчислима функция f_1 на два аргумента, която има свойството:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_0(\omega,\rho)}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_\rho).$$
- тотална изчислима функция f_2 на два аргумента, която има свойството:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_1(\omega,\rho)}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \cup \mathcal{L}(\mathcal{M}_\rho).$$
- тотална изчислима функция f_3, която има свойството:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_3(\omega)}) = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \mathcal{M}_\omega \text{ не завършва върху } \omega \text{ за } \leq |\alpha| \text{ стъпки }\}.$$
- тотална изчислима функция f_4, която има свойството:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_4(\omega)}) = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \mathcal{M}_\omega \text{ завършва върху } \omega \text{ за } \leq |\alpha| \text{ стъпки }\}.$$
- тотална изчислима функция f_5, която има свойството:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_5(\omega)}) = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega)\}.$$

[HU79]

Лема 1. Нека $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. Ако съществува безкраен език $L_0 \in \mathscr{S}$, който няма краен подезик в $\mathscr{S}$, то $\mathtt{Ind}(\mathscr{S})$ не е полуразрешим.

Упътване. Използвайте Твърдение 1 и разгледайте езика
$$L_0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_3(\omega)}).$$
□

Лема 2. Нека L_1 е език в $\mathscr{S}$ и нека L_2 е полуразрешим език, като $L_1 \subset L_2$ и $L_2 \notin \mathscr{S}$. Тогава $\mathtt{Ind}(\mathscr{S})$ не е полуразрешим.

Упътване. Използвайте Твърдение 1 и разгледайте езика
$$L_1 \cup (L_2 \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_{f_5(\omega)})).$$
□

Теорема 4 (Райс-Шапиро)**.** Нека $\mathtt{Ind}(\mathscr{S})$ е полуразрешим език. Тогава е изпълнено, че:

$$L \in \mathtt{Ind}(\mathscr{S}) \;\Leftrightarrow\; (\forall L_0)[L_0 \text{ е краен и } L_0 \subseteq L \implies L_0 \in \mathscr{S}].$$

5 Проблем на Пост за съответствието

[HU79, стр. 193] **Лема 3.** Съществува алгоритъм, който свежда MPCP към PCP.

Теорема 5 (Пост)**.** Проблемът за съответствието на Пост е неразрешим при азбука Σ с поне два символа.

Твърдение 2. Езикът

$$L = \{\ulcorner G \urcorner \mid G \text{ е еднозначна безконтекстна граматика}\}$$

е неразрешим.

Твърдение 3. Езикът

$$L = \{\ulcorner G_1 \urcorner \sharp \ulcorner G_2 \urcorner \mid \mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset\}$$

е неразрешим.

6 Неразрешими езици

Твърдение 4. Езикът

$$L = \{\ulcorner G_1 \urcorner \sharp \ulcorner G_2 \urcorner \mid \mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset\}$$

не е полуразрешим.

Твърдение 5. Езикът

$$L = \{\ulcorner G \urcorner \mid \mathcal{L}(G) = \Sigma^\star\}$$

не е полуразрешим.

Следствие 1. Езикът

$$L = \{\ulcorner G_1 \urcorner \sharp \ulcorner G_2 \urcorner \mid \mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)\}$$

не е полуразрешим.

[HU79, стр. 205] **Теорема 6** (Грейбах)**.** Нека $\mathcal{C}$ е клас от езици, за който съществува ефективно кодиране $\ulcorner L \urcorner$ на езиците в $\mathcal{C}$ и който е:

- ефективно затворен относно обединение;
- ефективно затворен относно конкатенация с регулярен език;
- "$= \Sigma^\star$"е неразрешим за достатъчно голяма Σ.

Нека P е нетривиално свойство на $\mathcal{C}$, което е изпълнено за всеки регулярен език и ако $L \in P$, то $L/_a \in P$, където

$$L/_a = \{\omega \mid \omega a \in L\}.$$

Тогава езикът $\{\ulcorner L \urcorner \mid P(L) \ \& \ L \in \mathcal{C}\}$ е неразрешим.

Следствие 2. Езикът

$$L = \{\ulcorner G \urcorner \mid \mathcal{L}(G) \text{ е регулярен}\}$$

не е полуразрешим.

7 Контекстносвободни езици

[HU79, стр. 131]

Теорема 7. Класът на контекстносвободните езици е затворен относно:

1. обединение, конкатенация, звезда на Клини.
2. сечение с регулярни езици.
3. образи на хомоморфизми.
4. образи на регулярни релации.

На англ. Dyck.

Определение 3. Език на Дик над езика $B_n = \{(_i,)_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ е множеството от всички думи, които представляват правилно разположени скоби.

Теоремата е формулирана като задача в [HU79, стр. 142].

Теорема 8. Класът от контекстносвободни езици е точно класът от езици от вида:

$$h(D_n \cap R),$$

където D_n е език на Дик, R е регулярен език, а $h : B_n^* \to \Sigma^*$ е хомоморфизъм.

Определение 4. За азбука $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и дума $w \in \Sigma^*$ с $|w|_i$ бележим броя букви a_i в w. Дефинираме $\|w\| = (|w|_1, |w_2, \ldots, |w|_n) \in \mathbb{N}^n$.

Определение 5. За вектор $u \in \mathbb{N}^n$ и множество от вектори $V \subseteq \mathbb{N}^n$ с $u+V$ и V^* бележим множествата от вектори:

$$u + V = \{u + v \,|\, v \in V\} \text{ и } V^* = \{\sum_{i=1}^{k} d_i v_i \,|\, k \in \mathbb{N}, d_i \in \mathbb{N} \text{ и } v_i \in V\}.$$

Теорема 9 (на Парих)**.** За всеки контекстносвободени език $L \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^*$ има естествено число k, вектори $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{N}^n$ и крайни множества $V_1, V_2, \ldots, V_k \subseteq \mathbb{N}^n$, за които:

$$\{\|w\| \,|\, w \in L\} = \bigcup_{i=1}^{k} (u_i + V_i^*).$$

Пучително е да се разгледа частния случай на еднобуквена азбука. Тогава, тъй като $w = a_1^{|w|_1}$ и $\|w\| = (|w|_1)$, може да отъждествим w с $\|w\|$. Освен това в този случай може да предполагаме, че $|V_i| = 1$ за всяко V_i от теоремата на Парих (може да вземем най-малкото общо кратно в по-големите множества и да добавим повече вектори u). Тогава $V_i = \{v_i\}$ и изразите $u_i + V_i^* = \{u_i + dv_i \,|\, d \in \mathbb{N}\}$ представляват аритметични прогресии.

Тоест, ако се абстрахираме от реда на буквите, контекстносвободните езици представляват крайни обединения на аритметични прогресии.

8 `PSPACE` и `NPSPACE` проблеми

Твърдение 6. Следният език

$$L = \{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A} \text{ е НКА и } \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^\star\}$$

е `PSPACE`-пълен.

Теорема 10 (Савич 1970)**.**

$$\mathtt{NPSPACE}(f(n)) \subseteq \mathtt{PSPACE}(f^2(n)).$$

Следствие 3. $\mathtt{NPSPACE} = \mathtt{PSPACE}$.

Теорема 11. Следният език

$$L = \{\ulcorner \mathcal{A}_1 \urcorner \sharp \ulcorner \mathcal{A}_2 \urcorner \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ са НКА и } \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)\}$$

е $\mathtt{PSPACE}$-пълен.

Теорема 12. Проблемът ($\mathtt{INT}$):

`Вход:` $n \in \mathbb{N},\ \ A_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \delta_i, F_i \rangle$ `- ДКА`
`Въпрос:` $\bigcap_i^n L(A_i) = \Sigma^*$`?`

е $\mathtt{PSPACE}$-пълен.

Теорема 13. Проблемът ($\mathtt{MIN(NFA} \to \mathtt{NFA)}$):

`Вход:` $k \in \mathbb{N},\ \ A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ `- НКА`
`Въпрос: има ли НКА с език` $L(A)$ `и не повече от` k `състояния?`

е $\mathtt{PSPACE}$-пълен.

Лема 4. $\mathtt{PATH} = \{\ulcorner G, s, t \urcorner \mid s \to_G t\} \in \mathtt{NL}$-пълен.

Лема 5. $\mathtt{co\text{-}PATH} \in \mathtt{NL}$.

Теорема 14. $\mathtt{NL} = \mathtt{co\text{-}NL}$.

Тази теорема остава за вас.

Теорема 15 (Immerman-Szelepcsényi)**.**

$$\mathtt{NPSPACE}(S(n)) = \mathtt{co\text{-}NPSPACE}(S(n)).$$

Следствие 4. Допълнението на всеки контекстнозависим език е контекстно зависим.

9 NP проблеми

[PL98, стр. 262] **Теорема 16.** Домино проблемът е неразрешим.

Упътване. Свеждаме ефективно езика

$$\{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{M} \text{ работи безкрайно дълго при вход } \varepsilon\}$$

към домино проблема. □

[PL98, стр. 310] **Теорема 17.** Ограниченият домино проблем е $\mathtt{NP}$-пълен

Тази теорема остава за вас.

[PL98, стр. 312] **Теорема 18** (Кук)**.** $\mathtt{3\text{-}SAT}$ проблемът е $\mathtt{NP}$-пълен.

Упътване. Сходна идея какво в доказателството на TQBF. $\square$

За един неориентиран граф $G = (V, E)$, казваме, че множеството $C \subseteq V$ **покрива върховете** на G, ако

$$(\forall (u, v) \in E)[u \in C \ \vee \ v \in C].$$

`Vertex Cover` е проблемът да се определи дали по даден неориентиран граф G и $k \in \mathbb{N}$ съществува покритие C на върховете на G, за което $|C| = k$.

[HU79, стр. 331] **Теорема 19.** `Vertex Cover` проблемът е NP-пълен.

Упътване. `3-SAT` се свежда полиномиално към `Vertex Cover`. $\square$

NP-пълни проблеми в теория на езиците

Определение 6. Казваме, че недетреминиран краен автомат $A = \langle \Sigma, Q, \{s\}, \Delta, F \rangle$ е еднозначен, ако $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ и за всяка дума $w \in L(A)$ има точно един успешен път с етикет w в A.

Лема 6. Ако $A_i = \langle \Sigma, Q_i, \{s_i\}, \Delta_i, F_i \rangle$ за $i = 1, 2$ са еднозначни НКА, то следните са еквивалентни:

1. $\exists w \in L(A_1) \triangle L(A_2)(|w| \leq |Q_1| + |Q_2|)$.
2. $L(A_1) \triangle L(A_2) \neq \emptyset$.

Теорема 20. Проблемът (`MIN(UFA` $\to$ `UFA)`):

`Вход:` $k \in \mathbb{N}$, $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ `- еднозначен НКА`
`Въпрос: има ли еднозначен НКА с език` $L(A)$ `и не повече от` k `състояния?`

е NP-пълен.

[Pap94, стр. 330] **Теорема 21** (Ladner)**.** Ако $\mathtt{P} \neq \mathtt{NP}$, то съществува NP проблем, който не е P проблем и не е NP-пълен проблем.

10 Машини на Тюринг с оракул

[Pap94, стр. 340] **Теорема 22** (Baker-Gill-Solovay)**.** Съществуват оракули A и B, за които $\mathtt{P}^A \neq \mathtt{NP}^A$ и $\mathtt{P}^B = \mathtt{NP}^B$.

11 Детерминирани стекови автомати и $LR(k)$-граматики

Определение 7. Стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z, F \rangle$ е детерминиран, ако са в сила следните:

1. $\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^*)$ е графика на функция

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$$

2. и за всяко състояние $p \in Q$ и стеков символ $X \in \Gamma$:

$$!\delta(p, \varepsilon, X) \Rightarrow \neg\exists a \in \Sigma(!\delta(p, a, X)).$$

В този случай ще пишем $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$.

Определение 8. За стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z, F\rangle$ и преход $t = \langle (p, a, X), (q, \beta)\rangle \in \Delta$ казваме, че:

1. t е *pop* преход, ако $\beta = \varepsilon$,
2. t е *peek* преход, ако $\beta = X$,
3. t е *push* преход, ако $\beta = YX$ за някое $Y \in \Gamma$.

A е в нормална форма, ако всеки преход на A е pop, peek или push.

Теорема 23. За всеки (детерминиран) стеков автомат A ефективно може да получим еквивалентен (детерминиран) стеков автомат A' в нормална форма.

Определение 9. За детерминиран стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$ казваме, че A зациклия върху вход $w \in \Sigma^*$, ако за всяко n има изпълнение:

$$(s, w, Z) \Rightarrow_A^{(n)} (p_n, w_n, \gamma_n).$$

Казваме, че A е ацикличен, ако A не зациклия върху никой свой вход.

Теорема 24. Проблемът дали детерминиран стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$ е ацикличен е разрешим за полиномиално време.

Теорема 25. За всеки детерминиран стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$ ефективно може да получим еквивалентен ацикличен детерминиран стеков автомат A'.

Теорема 26. За всеки ацикличен детерминиран стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$, съществува константа $c = c(A)$, за която за всяка дума $w \in \Sigma^*$ и всяко изпълнение:

$$(s, w, Z) \Rightarrow_A^{(n)} (p_n, w_n, \gamma_n)$$

е в сила, че $n \leq c(|w| + 1)$.

Теорема 27. За всеки детерминиран стеков автомат $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \delta, Z, F\rangle$ ефективно може да намерим детерминиран стеков автомат $\overline{A}$ с език $L(\overline{A}) = \Sigma^* \setminus L(A)$.

Теорема 28. За всеки детерминиран стеков автомат $A_S = \langle \Sigma, \Gamma, Q_S, s_S, \delta_S, Z, F_S\rangle$ и детерминиран краен автомат $A_D = \langle \Sigma, Q_D, s_D, \delta_D, F_D\rangle$ ефективно може да намерим:

1. детерминиран стеков автомат A с език:

$$L(A) = L(A_S) \cap L(A_D)$$

2. детерминиран стеков автомат A с език:

$$L(A) = \{\alpha \,|\, \exists\beta \in L(A_D)(\alpha \circ \beta \in L(A_S))\}.$$

Следствие 5. Нека Σ е азбука и \$ е символ извън Σ. Език $L \subseteq \Sigma^*$ се разпознава от детерминиран стеков автомат (с финални състояния) точно когато $L\$$ се разпознава от детерминиран стеков автомат с празен стек.

Определение 10. За естествено число $k \in \mathbb{N}$ дефинираме $first_k : \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ като:

$$first_k(w) = \begin{cases} w \text{ ако } |w| \leq k \\ u, \text{ за което } |u| = k \text{ и } w \in u\Sigma^*. \end{cases}$$

Определение 11. За контекстносвободна граматика $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, S, R \rangle$ десен елемнтарен извод е:

$$\alpha A w \Rightarrow_{rm} \alpha \beta w,$$

където $w \in \Sigma^*$ и $A \to \beta \in R$. (Най-)Десен извод в G е:

$$\alpha_0 \Rightarrow_{rm} \alpha_1 \cdots \Rightarrow_{rm} \alpha_n$$

за някое $n \geq 0$. Стандартно използваме $\alpha_0 \Rightarrow_{rm}^{(n)} \alpha_n$, за да подчертаем дължината на извода и $\alpha_0 \Rightarrow_{rm}^{*} \alpha_n$, когато тя не ни интересува.

Определение 12. За естествено число $k \in \mathbb{N}$ и контекстносвобдна граматика $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, S, R \rangle$ казваме, че G е $LR(k)$ граматика, ако винаги, когато са изпълнени следните три условия:

1. $S \Rightarrow_{rm}^{*} \alpha A w \Rightarrow_{rm} \alpha \beta w$,
2. $S \Rightarrow_{rm}^{*} \alpha' A' w' \Rightarrow_{rm} \alpha' \beta' w' = \alpha \beta x$,
3. $first_k(w) = first_k(x)$,

е в сила, че $\alpha A x = \alpha' A' w'$, в частност $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ и $x = w'$.

Теорема 29. За всеки детерминиран стеков автомат A, който разпознава с празен стек, има $LR(0)$-граматика G, за която $L(A) = L(G)$.

Теорема 30. Ако \$ е символ извън Σ и $G = \langle \Sigma \cup \{\$\}, \mathcal{N}, S, R \rangle$ е $LR(0)$-граматика с език $L(G) \subseteq \Sigma^* \{\$\}$, то има $LR(1)$-граматика G_1 с език $L(G_1) = L(G)\{\$\}^{-1}$.

Следствие 6. Ако A е детерминиран стеков автомат, то има $LR(1)$-граматика G с език $L(A) = L(G)$. (тук автоматът разпознава с финални състояния!)

Теорема 31. За всяко $k \in \mathbb{N}$ проблемът дали $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, S, R \rangle$ е $LR(k)$-граматика е разрешим.

Теорема 32. За всяко $k \in \mathbb{N}$ и всяка $LR(k)$-граматика G има детерминиран стеков автомат A с език $L(A) = L(G)$.

Теорема 33. Проблемът:

`Вход:` $G = \langle\ \Sigma, \mathcal{N}, S, R \rangle$
`Изход: да, ако има` k`, за което` G `е` $LR(k)$
`       не, иначе.`

е неразрешим.

12 Задачи

Задача 1. Докажете, че един език L е полуразрешим точно тогава, когато той е ефективно номеруем.

Задача 2. Докажете, че един език L е разрешим точно тогава, когато съществува алгоритъм, който изброява елементите на L във възходящ ред относно каноничната наредба.

[Pap94, стр. 184] **Задача 3.** Докажете, че `2-SAT` проблемът е `PTIME`.

Задача 4. Докажете директно, че `SAT` е `NP`-труден проблем като кодирате историята на едно изчисление на недетерминистична машина на Тюринг с формула в конюнктивна нормална форма.

[GJ79, стр. 53] **Задача 5.** `Exact Cover` се нарича проблемът дали при дадено множество S и негови подмножества $S_1, S_2, \dots, S_k$, съществува $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, такова че за всяко $x \in S$ има точно един индекс $i \in T$, за който $x \in S_i$. Докажете, че `Exact Cover` е `NP`-пълен проблем.

[HU79, стр. 333] **Задача 6.** Докажете, че `Hamilton Cycle` е `NP`-пълен проблем.

Упътване. `3-SAT` се свежда полиномиално към `Hamilton Cycle`. □

[GJ79, стр. 60] **Задача 7.** Нека имаме крайно множество A и функция $s : A \to \mathbb{N}^+$. Проблемът за съществуването на $A' \subseteq A$ със свойството, че

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$$

се нарича `PARTITION`. Докажете, че `PARTITION` е NP-пълен проблем.

Задача 8. *Двупосочен автомат* наричаме машина на Тюринг

$$\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, F, B \rangle,$$

за която:

- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \#, \$\}$, като $B, \#, \$ \notin \Sigma$,
- За всеки прехода $\langle (p, a), (q, b, --) \rangle \in \Delta$ е в сила, че $a = b \neq B$.

Език на двупосочен автомат M наричаме:

$$\mathcal{L}(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists f \in F \exists \gamma \in \Gamma^* ((\varepsilon, s, \#\alpha\$\rangle) \Rightarrow^*_M (\gamma, f, \varepsilon))\}.$$

1. Да се докаже, че за всеки двупосочен автомат M_1 има двупосочен автомат M_2 над същата азбука, за който:

$$\mathcal{L}(M_2) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists f \in F \exists \beta, \gamma \in \Gamma^* ((\varepsilon, s, \#\alpha\$\rangle) \Rightarrow^*_M (\beta, f, \gamma))\}.$$

2. Да се опише конструкция, която по даден двупосочен автомат M построява краен автомат A с азбука Σ, за който:

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A).$$

3. Докажете, че описаната от Вас конструкция е коректна.

4. Оценете броя на състоянията на построения от Вас автомат като функция на броя на състоянията на изходния двупосочен автомат.

Задача 9. Дадена е азбука $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ с $n \geq 2$ символа. За дума $w \in \Sigma^*$ с $|w|_i$ означаваме броя букви a_i в w, а с $\|w\| \in \mathbb{N}^n$ – вектора $(|w|_1, |w|_2, \ldots, |w|_n)$. За език $L \subseteq \Sigma^*$, $\mathcal{I}(L) = \{\|w\| \mid w \in L\}$.

1. Нека $u \in \mathbb{N}^n$ и $V \subseteq \mathbb{N}^n$ е множество с m елемента $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Да се докаже, че има регулярен език $L(u, V)$, за който:

$$\mathcal{I}(L(u, V)) = \{u + \sum_{i=1}^{m} d_i v_i \mid d_1, d_2, \ldots, d_m \in \mathbb{N}\}.$$

2. Нека $A = \langle \Sigma, Q, S, \Delta, F \rangle$ е краен автомат. Опишете конструкция, която по A намира естествено число N, вектори $u_1, u_2, \ldots, u_N \in \mathbb{N}^n$ и крайни множества $V_1, V_2, \ldots, V_N \subseteq \mathbb{N}^n$, за които:

$$\mathcal{I}(\mathcal{L}(A)) = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{I}(L(u_i, V_i)).$$

3. Докажете, че конструкцията Ви е коректна.

Задача 10. Разглеждаме следния проблем:

```
Вход: M еднолентова машина на Тюринг.
Изход: k ∈ ℕ и M_D -- k-лентова детерминирана машина на Тюринг,
                              за която L(M_D) = L(M).
```

1. Опишете конструкция, която решава горния проблем и има следното свойство: има полином $p(n)$, че за всяка машина на Тюринг с пространствена сложност $Space_M(n) \in \mathcal{O}(s(n))$ е в сила, че $Space_{M_D}(n) \in \mathcal{O}(p(n)(s(n)+1))$.

2. Докажете, че Вашата конструкция е коректна.

3. Оценете степента на полинома $p(n)$.

Задача 11. Нека $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ е тотален краен детерминиран автомат. С $L(p)$ означаваме езика на автомата $A_p = \langle \Sigma, Q, p, \delta, F \rangle$.

1. Опишете процедура с времева сложност $\mathcal{O}(|\Sigma||Q|^3)$, която намира всички двойки $(p, q) \in Q \times Q$, за които $L(p) \subseteq L(q)$.

2. Докажете, че Вашата процедура е коректна.

3. Докажете, че $L(p) \subseteq L(q)$ точно когато:

$$\forall \alpha \in \Sigma^*((|\alpha| \leq 2|Q| \,\&\, \alpha \in L(p)) \Rightarrow \alpha \in L(q)).$$

Литература

[GJ79] M. Garey and D. Johnson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.

[HU79] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, first ed., Addison-Wesley, 1979.

[Pap94] Christos Papadimitriou, *Computational complexity*, Assison-Wesley, 1994.

[PL98] Christos Papadimitriou and Harry Lewis, *Elements of the theory of computation*, Prentice-Hall, 1998.