Устен изпит по "Семантика на езиците за програмиране", юли 2010 г.

1. (150 т.) Да означим с $\mathcal{F}$ съвкупността на частичните функции на един аргумент в $\mathbb{N}$, а с $\mathcal{F}_t$ съвкупността на точните изображения на $\mathbb{N}_\perp$ в $\mathbb{N}_\perp$ (тези тотални изображения f, за които $f(\perp) = \perp$). Нека в $\mathcal{F}_t$ въведем наредбата "$\sqsubseteq$" така, че $f \sqsubseteq g \iff (\forall x \in \mathbb{N}_\perp)(f(x) = \perp \vee f(x) = g(x))$.

а) Докажете, че $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t, \sqsubseteq, \lambda x.\perp)$ е област на Скот.

Нека $\Gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_t$ е определено чрез равенството

$$\Gamma(\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ако } x \neq \perp \wedge !\varphi(x), \\ \neg ! & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

б) Докажете, че са в сила следните свойства на Γ:

(1) Изображението Γ е обратимо и е върху $\mathcal{F}_t$.

(2) Изображенията Γ и Γ^{-1} са непрекъснати.

(3) $(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F})(\varphi \subseteq \psi \iff \Gamma(\varphi) \sqsubseteq \Gamma(\psi))$.

Нека за всяко изображение Δ в $\mathcal{F}$ определим изображението Δ^* в $\mathcal{F}_t$ като $\Delta^*(f) = \Gamma(\Delta(\Gamma^{-1}(f)))$.

в) Докажете, че

(1) Ако Δ е непрекъснато, то и Δ^* е непрекъснато.

(2) Ако φ е най-малката неподвижна точка на Δ, то $\Gamma(\varphi)$ е най-малката неподвижна точка на Δ^*.

2. (50 т.) Дайте дефиниция на *затворено* подмножество на $\mathcal{F}_n$. Докажете, че сечение и обединение на затворени множества е затворено.

3. (50 т.) Нека P е логическа програма. Дайте дефиниция на изображението T_P. Докажете, че M е модел на P ако и само ако $T_P(M) \subseteq M$.