Семантика на езиците за програмиране - задачи

Стефан Вътев[1], Стела Николова[2]

30 май 2017 г.

[1]stefanv@fmi.uni-sofia.bg
[2]stenik@fmi.uni-sofia.bg

Съдържание

Глава 1

Верификация на програми по метода на Флойд

Верификация на итеративни програми по метода на индуктивните твърдения на Флойд [?].

Този метод е описан за първи път от Робърт Флойд [?]

Тук на практика следваме [?, Глава 3] и [2, Глава 1]

1.1 Програми с един цикъл

1.1.1 Решени задачи

Намиране на НОД

Да дефинираме функцията

$$\text{НОД}(x, y) = (\max z)[z \leq x \ \& \ z \leq y \ \& \ z \mid x \ \& \ z \mid y].$$

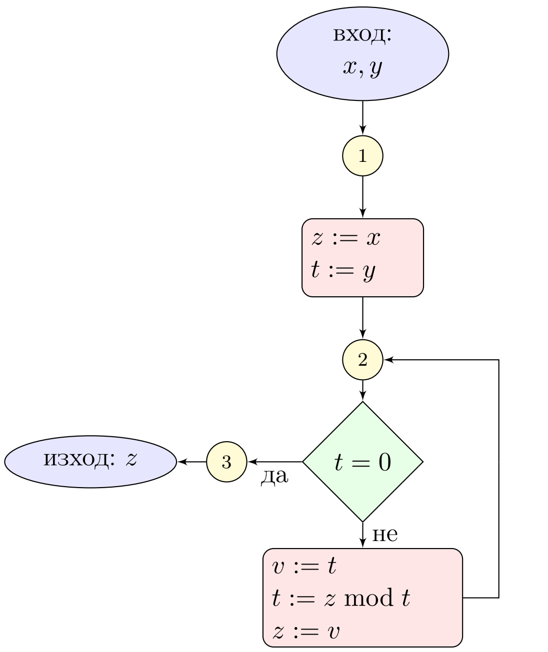
- Понеже $0 \mid 0$, то $\text{НОД}(0, 0) = 0$.
- Понеже всяко естествено число дели 0, то $\text{НОД}(0, z) = z$;
- Ясно е от дефиницията, че $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(y, x)$;

Твърдение 1.1. $(\forall x, y \in \mathbb{N})[\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(y, x \bmod y)]$.

Доказателство. Ще разгледаме няколко случая.

- Ако $x = y$, то всичко е ясно, защото $x \bmod x = x$.
- Ако $x < y$, то всичко е ясно, защото $x \bmod y = x$ и $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(y, x)$.
- Нека $x > y$ и $n = \text{НОД}(x, y)$. Тогава n е най-голямото естествено число, което $n \mid x$ и $n \mid y$. Нека $r = x \bmod y$. Тогава $x = ky + r$, $0 \leq r < y$. Щом n дели x и y, то е ясно, че n дели r. Остана да съобразим защо $n = \text{НОД}(y, r)$. Да допуснем, че $n < n'$ и n' дели y и r. Тогава n' също дели и $ky + r = x$. Достигнахме до противоречие с факта, че $n = \text{НОД}(x, y)$. Следователно, $n = \text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(y, r)$.

□



(a) Алгоритъм за намиране на НОД(x, y)

Да разгледаме свойствата:

$$A_1(x, y, z, t, v) \overset{\text{деф}}{\equiv} x, y \in \mathbb{N}$$

$$A_2(x, y, z, t, v) \overset{\text{деф}}{\equiv} \text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(z, t) \ \& \ x, y, z, t, v \in \mathbb{N}$$

$$A_3(x, y, z, t, v) \overset{\text{деф}}{\equiv} z = \text{НОД}(x, y)$$

Докажете, че за всеки преход $(k) \to (l)$ имаме

$$(\forall x, y, z, t, v)[A_k(x, y, z, t, v) \implies A_l(x, y, f_{kl}(z, t, v))].$$

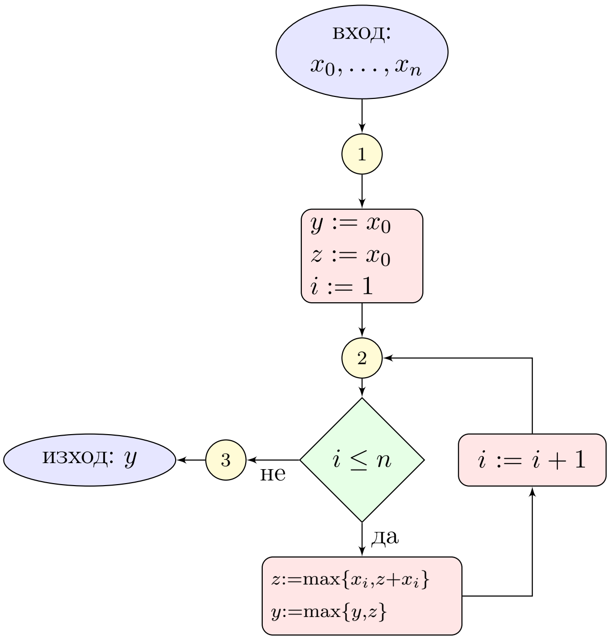
Твърдение 1.2. Докажете, че програмата на Фигура 1.7a е тотално коректна относно входното условие $x, y \in \mathbb{N}$ и изходното условие $z = \text{НОД}(x, y)$.

Упътване. Доказателството на $A_2(x, y, z, t, v) \implies A_2(x, y, f_{22}(z, t, v))$ следва директно от *Твърдение* 1.1. За доказателството на $A_2(x, y, z, t, v) \implies A_3(x, y, f_{23}(z, t, v))$ е достатъчно да съобразим, че ако имаме $A_2(x, y, z, t, v)$ и $t = 0$, то $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(z, 0) = z$.

Остана да докажем, че програмата винаги завършва при входни данни $x, y \in \mathbb{N}$. Да означим с t_i стойността на променливата t след i-тото преминаване през етикет (2). Това означава, че $t_0 = y$ и $t_{i+1} = z \bmod t_i$, за някое z. Следователно, $t_{i+1} < t_i$. От A_2 имаме, че всички $t_i \geq 0$. Така получаваме строго монотонно намаляваща редица $t_0 > t_1 > \cdots > t_i > \cdots \geq 0$, която е ограничена отдолу от 0. Заключаваме, че съществува i, за което $t_i = 0$. Следователно, програмата завършва. □

Търсене на максимална сума

Задача 1.1. Докажете, че програмата P, описана с блок-схемата на *Фигура* 1.2, пресмята $\max\{\sum_{i=k}^{l} x_i \mid 0 \leq k \leq l \leq n\}$.



Фигура 1.2: Ще докажем, че $y = \max\{\sum_{i=k}^{l} x_i \mid 0 \leq k \leq l \leq n\}$

Първо ще разгледаме две твърдения, които ще ни подскажат какво представляват междинните стойности на променливите z и y в програмата на *Фигура* 1.2.

Твърдение 1.3. Нека е дадена редицата $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. Да дефинираме:

- $Z(\bar{x}, 0) = x_0$;
- $Z(\bar{x}, i+1) = \max\{x_{i+1}, Z(\bar{x}, i) + x_{i+1}\}$.

Тогава за всяко $i \leq n$, $Z(\bar{x}, i) = \max\{\sum_{j=k}^{i} x_j \mid 0 \leq k \leq i\}$.

Доказателство. Индукция по i. За $i = 0$ е ясно, защото

$$Z(\bar{x}, 0) = x_0 = \max\{\sum_{j=k}^{0} x_j \mid 0 \leq k \leq 0\}.$$

Ще докажем твърдението за $i+1$.

$$\begin{aligned}
Z(\bar{x}, i+1) &= \max\{Z(\bar{x}, i) + x_{i+1}, x_{i+1}\} && \text{(от деф.)} \\
&= \max\{\max\{\sum_{j=k}^{i} x_j \mid 0 \leq k \leq i\} + x_{i+1}, x_{i+1}\} && \text{(от И.П.)} \\
&= \max\{\max\{\sum_{j=k}^{i+1} x_j \mid 0 \leq k \leq i\}, \sum_{j=i+1}^{i+1} x_j\} \\
&= \max\{\sum_{j=k}^{i+1} x_j \mid 0 \leq k \leq i+1\}.
\end{aligned}$$

□

Твърдение 1.4. Нека е дадена редицата $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Да дефинираме:

- $Y(\bar{x}, 0) = x_0$;
- $Y(\bar{x}, i+1) = \max\{Y(\bar{x}, i), Z(\bar{x}, i+1)\}$.

Тогава за всяко $i \leq n$, $Y(\bar{x}, i) = \max\{Z(\bar{x}, l) \mid 0 \leq l \leq i\}$.

Доказателство. Отново индукция по i. За $i = 0$ е очевидно, защото

$$Y(\bar{x}, 0) = x_0 = Z(\bar{x}, 0) = \max\{Z(\bar{x}, l) \mid 0 \leq l \leq 0\}.$$

Ще докажем твърдението за $i+1$.

$$\begin{aligned}
Y(\bar{x}, i+1) &= \max\{Y(\bar{x}, i), Z(\bar{x}, i+1)\} && \text{(от деф.)} \\
&= \max\{\max\{Z(\bar{x}, l) \mid 0 \leq l \leq i\}, Z(\bar{x}, i+1)\} && \text{(от И.П.)} \\
&= \max\{Z(\bar{x}, l) \mid 0 \leq l \leq i+1\}.
\end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. $Y(\bar{x}, n) = \max\{\sum_{i=k}^{l} x_i \mid 0 \leq k \leq l \leq n\}$.

Сега сме готови да дефинираме свойствата A_l за етикетите $l = 1, 2, 3$:

$A_1(\bar{x}, i, y, z, n) \equiv \bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$;
$A_2(\bar{x}, i, y, z, n) \equiv y = Y(\bar{x}, i-1)\ \&\ z = Z(\bar{x}, i-1)\ \&\ 1 \leq i \leq n+1$;
$A_3(\bar{x}, i, y, z, n) \equiv y = Y(\bar{x}, n)$.

За всеки директен преход $(k) \to (l)$ между етикети в блок схемата, асоциираме функция f_{kl}, която показва как се изменят стойностите на променливите участващи в програмата на *Фигура* 1.2:

$f_{12}(\bar{x}, i, y, z, n) = (\bar{x}, 1, x_0, x_0, n)$;
$f_{22}(\bar{x}, i, y, z, n) = (\bar{x}, i+1, max\{x_i, z + x_i\}, \max\{y, z\}, n)$;
$f_{23}(\bar{x}, i, y, z, n) = (\bar{x}, i, y, z, n)$.

Твърдение 1.5. За всеки директен преход между етикети $(k) \to (l)$ е изпълнена импликацията:

$$(\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1})(\forall i, j \in \mathbb{Z})[A_k(\bar{x}, i, j, n) \implies A_l(f_{kl}(\bar{x}, i, j, n))].$$

Доказателство.

$(1 \to 2)$ Следва директно от дефинициите на $Y(\bar{x}, 0)$ и $Z(\bar{x}, 0)$.

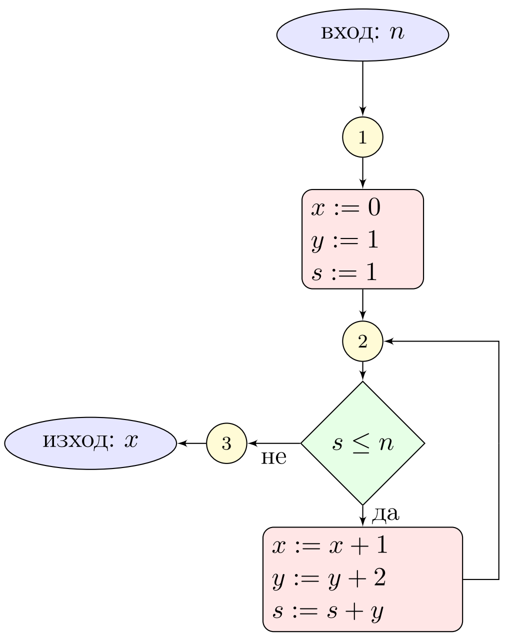
$(2 \to 2)$ Следва директно от *Твърдение* 1.3 и *Твърдение* 1.4. Ясно е също, щом преминаваме $2 \to 2$, то $1 \leq i + 1 \leq n + 1$.

$(2 \to 3)$ Понеже $i \leq n + 1$ и прехода $2 \to 3$ ни дава, че $i > n$, то следва, че $i = n + 1$. Тогава $Y(i - 1) = Y(n)$. Сега прилагаме *Следствие* 1.1.

□

Следствие 1.2. Програмата от *Фигура* 1.2 е частично коректна относно входното условие $I(\bar{x}, n) \equiv \bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ и изходното условие $O(\bar{x}, n, y) \equiv y = \max\{\sum_{i=k}^{l} x_i \mid 0 \leq k \leq l \leq n\}$.

1.1.2 Задачи с упътване



(a) Алгоритъм за намиране на $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Да разгледаме свойствата:

$$A_1(x, y, s, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} n \in \mathbb{N}$$

$$A_2(x, y, s, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} x, n \in \mathbb{N} \ \& \ x^2 \leq n \ \& \ y = 2x + 1 \ \& \ s = (x+1)^2$$

$$A_3(x, y, s, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} x^2 \leq n < (x+1)^2$$

Съобразете, че $A_3(x, y, s, n) \implies x = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Докажете, че за всеки преход $(k) \to (l)$ имаме

$$(\forall x, y, s, n)[A_k(x, y, s, n) \implies A_l(f_{kl}(x, y, s), n)].$$

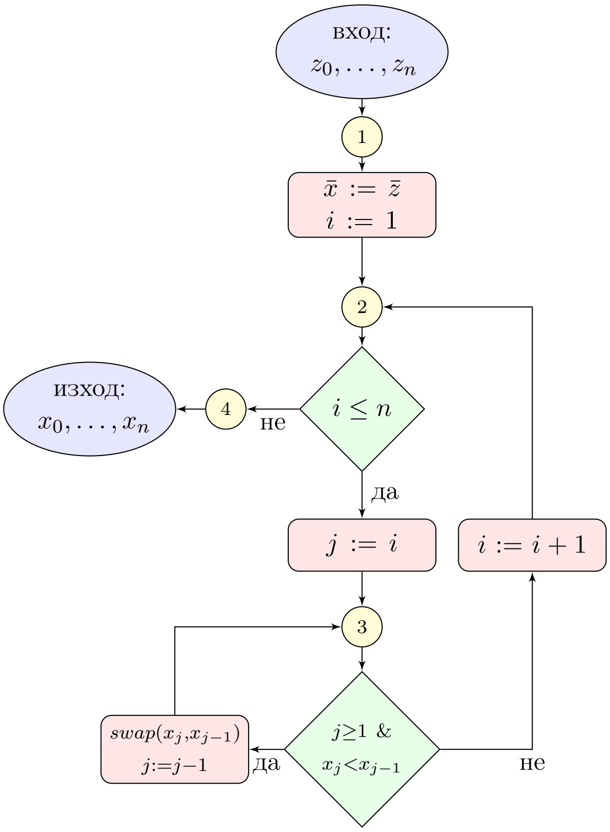
Задача 1.2. Докажете, че програмата P описана с блок-схемата на Фигура 1.3a е тотално коректна относно входното условие $n \in \mathbb{N}$ и изходното условие $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1.2 Програми с два цикъла

1.2.1 Решени задачи

Сортиране чрез вмъкване

Задача 1.3. Докажете, че програмата, описана с блок-схемата на *Фигура* 1.4, сортира входния масив във възходящ ред.



Фигура 1.4: По даден входен масив $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$, програмата го сортира във възходящ ред (insertion sort)

Удобно е да означим:

$$\mathtt{Ord}(\bar{x}, i, j) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall k)[i \leq k < j \implies x_k \leq x_{k+1}],$$

което ни казва, че елементите в интервала $[i, j]$ на масива $\bar{x}$ са подредени във възходящ ред. Също така, да означим:

$$\mathtt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \bar{z}, \bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \;\&\; (\exists f)[f : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\} \text{ е биекция } \&$$
$$(\forall i)[0 \leq i \leq n \implies z_i = x_{f(i)}]].$$

Това означава, че $\bar{z}$ е пермутация на елементите на $\bar{x}$.

Понеже масивът $\bar{z}$ и n са константни, то няма нужда да описваме как се променят с функциите f_{kl}

За всеки директен преход $(k) \to (l)$ между етикети в блок схемата, асоциираме функция f_{kl}, която показва как се изменят стойностите на променливите участващи в програмата.

$$\begin{aligned}
f_{12}(\bar{x}, i, j) &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bar{x}, 1, j) \\
f_{23}(\bar{x}, i, j) &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bar{x}, i, i) \\
f_{24}(\bar{x}, i, j) &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bar{x}, i, j) \\
f_{32}(\bar{x}, i, j) &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bar{x}, i+1, j) \\
f_{33}(\bar{x}, i, j) &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bar{x}', i, j-1),
\end{aligned}$$

където $\bar{x}' = (x'_0, \dots, x'_n)$ е променения масив, за който $x'_{j-1} = x_j$, $x'_j = x_{j-1}$, а $x'_k = x_k$ за всеки индекс k в интервала $[0, n] \setminus \{j-1, j\}$.

Към всеки етикет (l) в блок схемата на програмата P на *Фигура* 1.4, асоциираме предиката A_l, където:

$$\begin{aligned}
A_1(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) &\stackrel{\text{деф}}{\equiv} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1} \;\&\; n \geq 0 \\
A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) &\stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n) \;\&\; \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i-1) \;\&\; 0 \leq i \leq n+1 \\
A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) &\stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n) \;\&\; \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, j-1) \;\&\; \texttt{Ord}(\bar{x}, j, i) \;\&\; \\
&\qquad 0 \leq j \leq i \leq n \;\&\; (0 < j < i \implies x_{j-1} \leq x_{j+1}) \\
A_4(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) &\stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n) \;\&\; \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, n).
\end{aligned}$$

Твърдение 1.6. За всеки директен преход между етикети $(k) \to (l)$ е изпълнена импликацията:

$$(\forall \bar{z}, \bar{x}, i, j, n)[A_k(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) \implies A_l(\bar{z}, f_{kl}(\bar{x}, i, j), n)].$$

Доказателство.

$(1 \to 2)$ Очевидно е, че имаме $A_2(\bar{z}, \bar{x}, 1, j, n)$, т.е. $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, 1-1)$ и $1 \leq n+1$.

$(2 \to 3)$ Нека $A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n)$. Ще докажем, че имаме $A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, i, n)$. Това е съвсем лесно:

- От A_2 е ясно, че имаме $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i-1)$.
- Очевидно е, че имаме $\texttt{Ord}(\bar{x}, i, i)$.
- От A_2 имаме, че $i < n+1$. Но понеже от етикет 2 сме отишли в етикет 3, то $i \neq n+1$. Следователно, $0 \leq i \leq i \leq n$.
- Импликацията $0 < i < i \implies x_{i-1} \leq x_{i+1}$ е изпълнена по тривиални причини.

(3 → 3) Нека $A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n)$. Ще докажем, че $A_3(\bar{z}, \bar{x}', i, j-1, n)$. Понеже сме направили преход $3 \to 3$, то имаме също свойството, че $j \geq 1$ и $x_j < x_{j-1}$. Това означава, че:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \overbrace{x_0 \leq \cdots \leq x_{j-2} \leq x_{j-1}}^{\texttt{Ord}} > \overbrace{x_j \leq x_{j+1} \leq \cdots \leq x_i}^{\texttt{Ord}} \\
\bar{x}' &= \underbrace{x_0 \leq \cdots \leq x_{j-2}}_{\texttt{Ord}} \square \underbrace{x'_{j-1}}_{x_j} < \underbrace{x'_j}_{x_{j-1}} \square \underbrace{x_{j+1} \leq \cdots \leq x_i}_{\texttt{Ord}}
\end{aligned}$$

- Ясно е, че $0 \leq j-1 \leq i$;
- От $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, j-1)$ следва, че $\texttt{Ord}(\bar{x}', 0, j-2)$, защото единствената промяна в масива е размяната на стойностите на x_{j-1} и x_j.
- За да докажем, че $\texttt{Ord}(\bar{x}', j-1, i)$, трябва да разгледаме два случая.
  - Ако $j = i$, тогава $x_i < x_{i-1}$. Да проверим, че $\texttt{Ord}(\bar{x}', i-1, i)$. Имаме, че:

    $$\texttt{Ord}(\bar{x}', i-1, i) \iff x'_{i-1} \leq x'_i.$$

    Ние имаме дясната страна на еквивалентността, защото от размяната на елементите x_{i-1} и x_i имаме

    $$x'_{i-1} = x_i < x_{i-1} = x'_i.$$

  - Ако $j < i$, тогава от $A_3(\bar{x}, i, j, n)$ имаме, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, j, i)$, и $x_{j-1} \leq x_{j+1}$, защото $0 < j < i$. Щом имаме $\texttt{Ord}(\bar{x}, j, i)$, за да докажем, че $\texttt{Ord}(\bar{x}', j-1, i)$ е достатъчно да проверим, че $x'_{j-1} \leq x'_j$ и $x'_j \leq x'_{j+1}$. Понеже сме извършили размяна на стойностите на x_{j-1} и x_j, а останалите елементи на $\bar{x}$ остават непроменени, получаваме:
    * $x'_{j-1} = x_j < x_{j-1} = x'_j$,
    * $x'_j = x_{j-1} \leq x_{j+1} = x'_{j+1}$.
- Остана да проверим, че ако $0 < j-1 < i$, то $x'_{j-2} \leq x'_j$, т.е. дали

  $$x'_{j-2} = x_{j-2} \leq x_{j-1} = x'_j.$$

  Това е изпълнено, защото от $A_3(\bar{x}, i, j, n)$ имаме, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, j-1)$ и следователно $x_{j-2} \leq x_{j-1}$.

(3 → 2) Нека $A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n)$. Щом сме отишли в етикет 2, значи имаме

$$\neg(1 \leq j \; \& \; x_j < x_{j-1}).$$

Ще докажем $A_2(\bar{z}, \bar{x}, i+1, j, n)$.

- $A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) \implies i \leq n \implies i+1 \leq n+1$.
- Трябва да проверим, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i+1-1)$. Да видим защо сме преминали от 3 към 2.

– Ако $j < 1$, то $j = 0$, защото от A_3 имаме, че $0 \leq j$. Освен това, от A_3 имаме $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i)$. Оттук ведната следва, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i-1)$
– Ако $j \geq 1$, но $x_{j-1} \leq x_j$. От A_3 имаме, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, j-1)$ и $\texttt{Ord}(\bar{x}, j, i)$. От всичко това имаме, че

$$x_0 \leq \cdots \leq x_{j-1} \leq x_j \leq x_{j+1} \leq \cdots \leq x_i.$$

Заключаваме, че $\texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i)$.

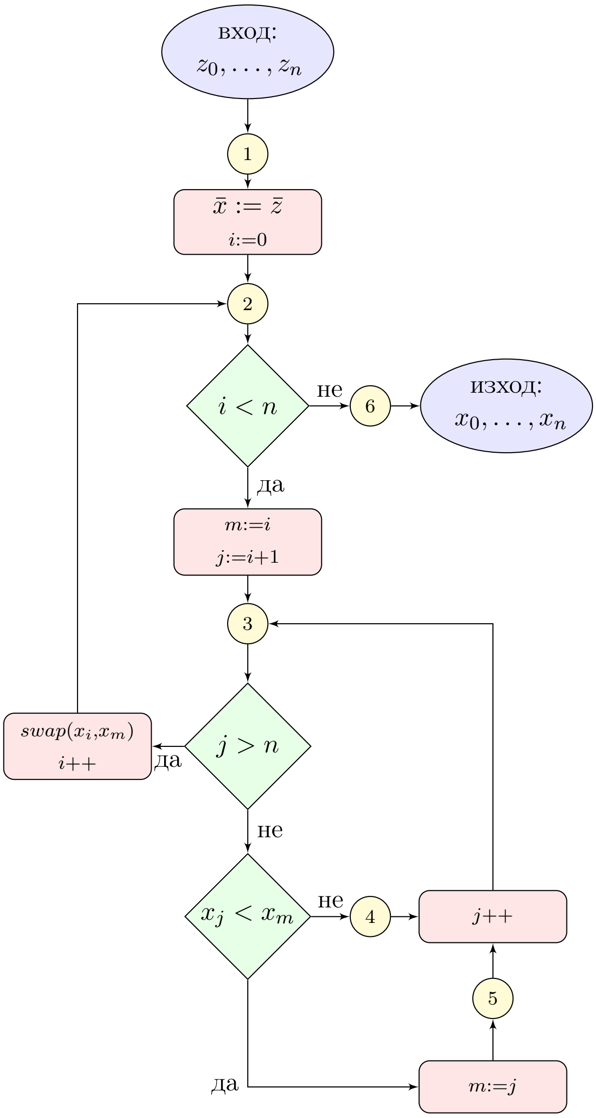
$(2 \to 4)$ Нека $A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n)$ е изпълнено. Щом се достигнали етикета 4, значи имаме и $i > n$. От A_2 пък имаме $i \leq n+1$. Следователно, $i = n+1$ и тогава $A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, n) \implies \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, n+1-1)$.

□

Следствие 1.3. Програмата P от *Фигура* 1.4 е частично коректна относно входното условие $I(\bar{z}, n) \stackrel{\text{деф}}{=} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ и изходното условие $O(\bar{z}, \bar{x}, n) \equiv \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, n)\ \&\ \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n)$.

1.2.2 Задачи с упътване

Сортиране с избор



(a) Блок схема за алгоритъм, който сортира входния масив възходящ ред (Selection sort)

Трябва да докажем, че програмата е частично коректна относно

$$I(\bar{z}, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$O(\bar{z}, \bar{x}, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, n) \ \& \ \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n).$$

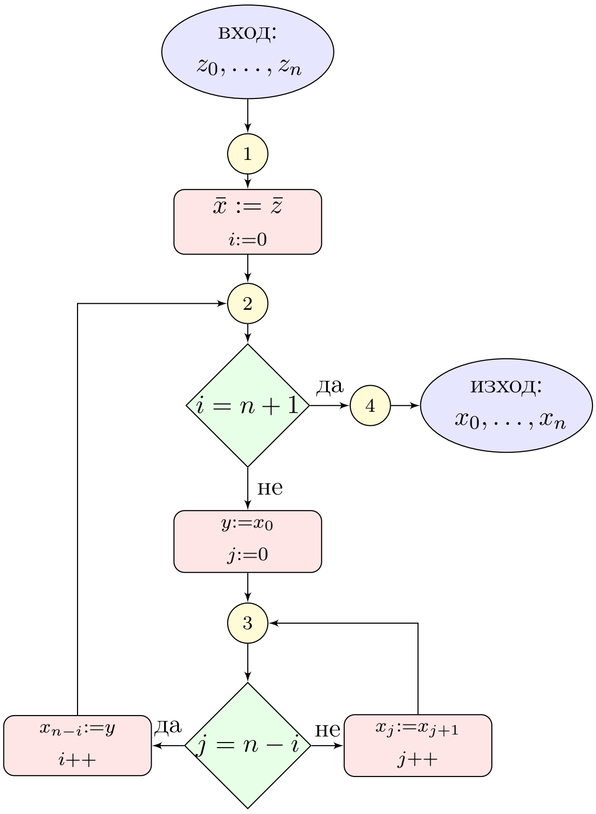
За да направим това, разгледайте свойствата:

- $A_1(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1} \ \& \ n \geq 0;$
- $A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n) \ \& \ \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, i) \ \& \ i \leq n \ \& \ (0 < i \implies x_{i-1} = \min\{x_{i-1}, \dots, x_n\});$
- $A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \ \& \ x_m = \min\{x_i, \dots, x_{j-1}\} \ \& \ i \leq m \leq j \leq n+1;$
- $A_4(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j+1, m, n);$
- $A_5(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} A_4(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n);$
- $A_6(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Ord}(\bar{x}, 0, n) \ \& \ \texttt{Perm}(\bar{z}, \bar{x}, n).$

Докажете, че за всеки преход $(k) \to (l)$ имаме

$$A_k(\bar{z}, \bar{x}, i, j, m, n) \implies A_l(\bar{z}, f_{kl}(\bar{x}, i, j, m), n).$$

Обръщане на масив



(a) Ще докажем, че по даден входен масив, програмата го обръща

Да положим предикатите:

$$\texttt{Shift}(\bar{x}, \bar{z}, i, j, s) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall k)[i \leq k \leq j \to x_k = z_{k+s}];$$

$$\texttt{Inv}(\bar{x}, \bar{z}, i, j) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall k)[i \leq k \leq j \to x_k = z_{n-k}].$$

Трябва да докажем, че програмата е частично коректна относно

$$I(\bar{z}, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1} \ \& \ n \geq 0;$$

$$O(\bar{z}, \bar{x}, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Inv}(\bar{x}, \bar{z}, 0, n).$$

Разгледайте свойствата:

$$A_1(\bar{z}, \bar{x}, i, j, y, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \bar{z} \in \mathbb{Z}^{n+1} \ \& \ n \geq 0$$

$$\begin{aligned} A_2(\bar{z}, \bar{x}, i, j, y, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} & \ 0 \leq i \leq n+1 \ \& \\ & \texttt{Inv}(\bar{x}, \bar{z}, n+1-i, n) \ \& \\ & \texttt{Shift}(\bar{x}, 0, n-i, i); \end{aligned}$$

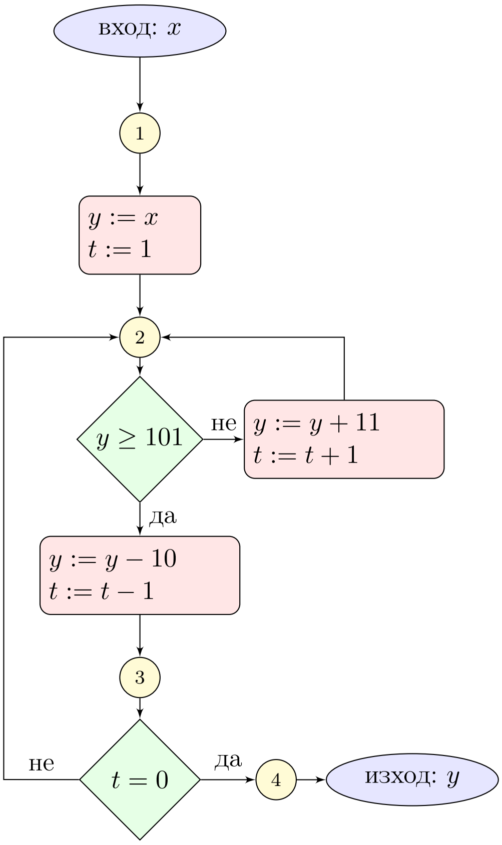
$$\begin{aligned} A_3(\bar{z}, \bar{x}, i, j, y, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} & \ y = z_i \ \& \ 0 \leq j \leq n-i \ \& \ 0 \leq i \\ & \texttt{Inv}(\bar{x}, \bar{z}, n+1-i, n) \ \& \\ & \texttt{Shift}(\bar{x}, 0, j-1, i+1) \ \& \\ & \texttt{Shift}(\bar{x}, j, n-i, i); \end{aligned}$$

$$A_4(\bar{z}, \bar{x}, i, j, y, n) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{Inv}(\bar{x}, \bar{z}, 0, n).$$

Докажете, че за всеки преход $(k) \to (l)$ имаме

$$A_k(\bar{z}, \bar{x}, i, j, y, n) \implies A_l(\bar{z}, f_{kl}(\bar{x}, i, j, y), n).$$

Функцията 91 на Маккарти



(a) Итеративна версия на функцията 91 на Маккарти

Да разгледаме свойствата:

$A_1(x, y, t) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} x \in \mathbb{N} \ \& \ x \leq 100$

$A_2(x, y, t) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (t \geq 2 \implies y \leq 111) \ \& \ (t = 1 \implies y \leq 101)$

$A_3(x, y, t) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (t \geq 1 \implies y \leq 101) \ \& \ (t = 0 \implies y = 91) \ \&$
$91 \leq y \leq 101$

$A_4(x, y, t) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} y = 91.$

Докажете, че за всеки преход $(k) \to (l)$ имаме

$(\forall x, y, z, t, v)[A_k(x, y, z, t, v) \implies A_l(x, y, f_{kl}(z, t, v))].$

Нека да означим y_i, t_i стойностите на променливите y и t точно след i-тото преминаване през (2). За да докажете тотална коректност, използвайте, че редицата $\{(101 - y_i + 10t_i, t_i) \mid i = 0, 1, \dots\}$ е строго намаляваща относно лексикографската наредба.

Глава 2

Задачи за денотационна семантика по стойност

2.1 Решени задачи

Задача 2.1. Дадена е следната програма:

```
h(x,y) = f(x,y,1) where
  f(x,y,z) = if x <= 1 then z
             else f(x-1, y, z*g(x,y))
  g(x,y) = if y == 0 then 1
           else x * g(x, y - 1)
```

Докажете, че $(\forall x, y \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \simeq (x!)^y]$.

Решение. Да разгледаме непрекъснатите оператори

$$\Gamma_1 : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3$$
$$\Gamma_2 : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3,$$

които съответстват на термовете дефиниращи функциите `f` и `g`:

$$\Gamma_1(f,g)(x,y,z) \simeq \begin{cases} z & \text{, ако } x \leq 1 \\ f(x-1, y, z \cdot g(x,y)) & \text{, иначе} \end{cases}$$
$$\Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1 & \text{, ако } y = 0 \\ x \cdot g(x, y-1) & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Тогава операторът $\Delta : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2$, дефиниран като:

$$\Delta(f,g) = (\Gamma_1(f,g), \Gamma_2(f,g)),$$

също е непрекъснат. Ако означим с (φ_1, φ_2) най-малката неподвижна точка на Δ, то по дефиниция

Знаем, че φ_1, φ_2 е най-малкото решение на системата от уравнения:

$$\Gamma_1(f,g) = f$$
$$\Gamma_2(f,g) = g$$

Следвайки дефинициите, $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \simeq \varphi_1(x,y,1)$

$$D_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \simeq \varphi_1(x,y,1).$$

Сега дефинираме следните свойства:

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y,z \in \mathbb{N})[!f(x,y,z) \implies f(x,y,z) \simeq z.(x!)^y],$$
$$P_2(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y \in \mathbb{N})[!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq x^y].$$

Понеже те са от тип частична коректност, те са и непрекъснати. Ще докажем с индукционно правило на Скот, приложено върху областта на Скот $\mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2$ за непрекъснатото изображение Δ, че $P(\varphi_1,\varphi_2)$, където

$$P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} P_1(f,g) \ \&\ P_2(f,g).$$

P също е непрекъснато свойство, защото е конюнкция на две непрекъснати свойства.

Очевидно е, че $P(\emptyset^{(3)},\emptyset^{(2)})$. Сега да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено. Ще докажем $P(\Delta(f,g))$.

1) Ще докажем, че е изпълнено $P_1(\Delta(f,g))$, т.е.

$$(\forall x,y,z \in \mathbb{N})[!\Gamma_1(f,g)(x,y,z) \implies \Gamma_1(f,g)(x,y,z) \simeq z.(x!)^y].$$

Нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y,z)$.

- ако $x \leq 1$, то $\Gamma_1(f,g)(x,y,z) \simeq z = z.(x!)^y$.
- ако $x > 1$, тогава имаме, че:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(f,g)(x,y,z) &\simeq f(x-1,y,z.g(x,y)) && \text{(от деф.)}\\
&\simeq f(x-1,y,z.x^y) && (\text{от } P_2(f,g))\\
&\simeq (z.x^y).((x-1)!)^y && (\text{от } P_1(f,g))\\
&\simeq z.(x!)^y.
\end{aligned}$$

2) Ще докажем, че е изпълнено $P_2(\Delta(f,g))$, т.е.

$$(\forall x,y \in \mathbb{N})[!\Gamma_2(f,g)(x,y) \implies \Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq x^y].$$

Нека $!\Gamma_2(f,g)(x,y)$.

- ако $y = 0$, то $\Gamma_2(f,g)(x,0) \simeq 1 = x^0$.
- ако $y > 0$, то имаме

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(f,g)(x,y) &\simeq x.g(x,y-1) && \text{(от деф.)}\\
&\simeq x.x^{y-1} && (\text{от } P_2(f,g))\\
&\simeq x^y.
\end{aligned}$$

Заключаваме, че $P(\Delta(f,g))$. Следователно, $P(\varphi_1,\varphi_2)$ и в частност,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) &\simeq \varphi_1(x,y,1) && \text{(от деф.)}\\
&\simeq 1.(x!)^y && \text{(от } P_1(\varphi_1,\varphi_2))\\
&\simeq (x!)^y.
\end{aligned}$$

□

Решение. Можем да решим задачата и без да използваме правилото на Скот. Нека $(\varphi,\gamma) = \mathrm{lfp}(\Delta)$. Първо с индукция по $y \in \mathbb{N}$ можем да докажем свойството, че:

$$P_2(y) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall x \in \mathbb{N})[!\gamma(x,y)\ \&\ \gamma(x,y) = x^y].$$

- Ясно е, че $P(0)$ е изпълнено, защото за произволно x,

$$\gamma(x,0) = \Gamma_2(\gamma)(x,0) = 1 = x^0.$$

- Да приемем, че твърдението е вярно за $P_2(y)$. Ще докажем, че $P_2(y+1)$. За произволно x,

$$\begin{aligned}
\gamma(x,y+1) &= \Gamma_2(\gamma)(x,y+1) && \text{(защото } \gamma \text{ е н.м.н.т. на } \Gamma_2)\\
&= x \cdot \gamma(x,y) && \text{(от деф. на } \Gamma_2)\\
&= x \cdot x^y && \text{(от И.П. за } P_2(y))\\
&= x^{y+1}.
\end{aligned}$$

Сега ще докажем с индукция по x свойството

$$P_1(x) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall y,z \in \mathbb{N})[!\varphi(x,y,z)\ \&\ \varphi(x,y,z) = z \cdot (x!)^y].$$

- За $x \leq 1$, то $\varphi(x,y,z) = z = z \cdot (x!)^y$.
- Да приемем, че твърдението е вярно за $P_1(x)$. Ще докажем, че $P_1(x+1)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1,y,z) &= \Gamma_1(\varphi,\gamma)(x,y,z)\\
&= \varphi(x,y,z \cdot \gamma(x+1,y))\\
&= \varphi(x,y,z \cdot (x+1)^y)\\
&= z(x+1)^y \cdot (x!)^y\\
&= z \cdot ((x+1)!)^y.
\end{aligned}$$

□

Задача 2.2. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = g(x,0) where
  f(x,y) = if y == 0 then 2^x
             else if x == y then 3^y
               else 3*f(x - 1, y - 1) + 2*f(x- 1, y)
  g(x,y) = if x < y then 0
             else g(x, y + 1) + f(x, y)
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathrm{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathrm{h}]\!](x) \simeq 5^x]$.

Упътване. Използвайте следните свойства:

$\binom{x}{y}$ - Нютонов бином

- $5^x = \sum_{i=0}^{x} 3^i 2^{x-i}\binom{x}{i}$;
- $\binom{x}{i} = \binom{x-1}{i-1} + \binom{x-1}{i}$;
- $3^i 2^{x-i}\binom{x}{i} = 3.3^{i-1}2^{x-i}\binom{x-1}{i-1} + 2.3^i 2^{x-1-i}\binom{x-1}{i}$.

Тогава приложете правилото на Скот за:

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y)[!f(x,y)\ \&\ x \geq y \implies f(x,y) \simeq 3^y 2^{x-y}\binom{x}{y}],$$

$$P_2(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y)[!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq \sum_{i=y}^{x} 3^i 2^{x-i}\binom{x}{i}].$$

□

Сега ще дадем пълно решение на тази задача.

Решение. Да разгледаме следните две непрекъснати изображения, които съответстват на термовете дефиниращи функциите **f** и **g**:

$$\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } y = 0 \\ 3^y, & \text{ако } x = y \\ 2 \cdot f(x-1,y-1) + 3 \cdot f(x-1,y), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } y > x \\ g(x,y+1) + f(x,y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава $\Delta : \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$, дефинирано като:

$$\Delta(f,g) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma_1(f,g), \Gamma_2(f,g)),$$

също е непрекъснато изображение. Ако означим с (φ_1, φ_2) най-малката неподвижна точка на Δ, то по дефиниция

$$\mathcal{D}_V[\![\mathrm{h}]\!](x) \simeq \varphi_2(x,0).$$

Сега дефинираме следните свойства:

$$P_1(f,g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[!f(x,y) \;\&\; y \leq x \implies f(x,y) \simeq 2^y 3^{x-y} \binom{x}{y}],$$

$$P_2(f,g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq \sum_{z=y}^{x} 2^z 3^{x-z} \binom{x}{z}].$$

Понеже те са от тип частична коректност, те са и непрекъснати. Ще докажем с индукционно правило на Скот, приложено върху областта на Скот $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ за непрекъснатото изображение Δ, че $P(\varphi_1, \varphi_2)$, където

$$P(f,g) \overset{\text{деф}}{\equiv} P_1(f,g) \;\&\; P_2(f,g).$$

P също е непрекъснато свойство, защото е конюнкция на две непрекъснати свойства.

Очевидно е, че $P(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$. Сега да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено. Ще докажем $P(\Delta(f,g))$.

1) Ще докажем, че $P_1(\Delta(f,g))$, т.е.

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[!\Gamma_1(f,g)(x,y) \;\&\; y \leq x \implies \Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2^y 3^{x-y} \binom{x}{y}].$$

Нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq u$ и $y \leq x$. Според дефиницията на Γ_1, трябва да разгледаме три случая:

$\binom{x}{0} = 1$

- ако $y = 0$, тогава

$$\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 3^x \simeq 2^0 3^{x-0} \binom{x}{0}.$$

$\binom{x}{x} = 1$

- ако $x = y$, тогава

$$\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2^y \simeq 2^y 3^{x-y} \binom{x}{y}.$$

- иначе, $0 < y < x$ и

$$!\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq 2.f(x-1, y-1) + 3.f(x-1, y) \simeq u.$$

Понеже е изпълнено $P_1(f,g)$, то имаме, че:

$$f(x-1, y-1) \simeq 2^{y-1} 3^{x-1-(y-1)} \binom{x-1}{y-1},$$

$$f(x-1, y) \simeq 2^y 3^{x-1-y} \binom{x-1}{y}.$$

Обединявай всичко това, получаваме:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(f,g)(x,y) &\simeq 2.f(x-1,y-1)+3.f(x-1,y) && \text{(от деф.)}\\
&\simeq 2.2^{y-1}3^{x-y}\binom{x-1}{y-1}+3.2^{y}3^{x-1-y}\binom{x-1}{y} && \text{(от } P_1(f,g))\\
&\simeq 2^{y}3^{x-y}\binom{x-1}{y-1}+2^{y}3^{x-y}\binom{x-1}{y}\\
&\simeq 2^{y}3^{x-y}[\binom{x-1}{y-1}+\binom{x-1}{y}]\\
&\simeq 2^{y}3^{x-y}\binom{x}{y}.
\end{aligned}$$

2) Ще докажем, че $P_2(\Delta(f,g))$, т.е.

$$(\forall x,y\in\mathbb{N})[!\Gamma_2(f,g)(x,y) \implies \Gamma_2(f,g)(x,y)\simeq\sum_{z=y}^{x}2^{z}3^{x-z}\binom{x}{z}].$$

Нека $!\Gamma_2(f,g)(x,y)\simeq u$. Според дефиницията на Γ_2, трябва да разгледаме два случая:

- ако $y>x$, то

$$\Gamma_2(f,g)(x,y)\simeq 0\simeq\sum_{z=y}^{x}2^{z}3^{x-z}\binom{x}{z},$$

защото сумата от елементите на празното множество е 0.

- ако $y\le x$, то

$$\Gamma_2(f,g)(x,y)\simeq g(x,y+1)+f(x,y).$$

Понеже е изпълнено $P_1(f,g)$ и $P_2(f,g)$, то имаме, че:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(f,g)(x,y) &\simeq g(x,y+1)+f(x,y) && \text{(от деф. на } \Gamma_2)\\
&\simeq g(x,y+1)+2^{y}3^{x-y}\binom{x}{y} && \text{(от } P_1(f,g))\\
&\simeq \sum_{z=y+1}^{x}2^{z}3^{x-z}\binom{x}{z}+2^{y}3^{x-y}\binom{x}{y} && \text{(от } P_2(f,g))\\
&\simeq \sum_{z=y}^{x}2^{z}3^{x-z}\binom{x}{z}.
\end{aligned}$$

Накрая заключаваме, че $P(\Delta(f,g))$. Следователно, $P(\varphi_1,\varphi_2)$ и в частност,

$$\begin{aligned}
D_V[\![\mathtt{h}]\!](x) &\simeq \varphi_2(x,0) && \text{(от деф.)}\\
&\simeq \sum_{z=0}^{x} 2^z 3^{x-z}\binom{x}{z} && \text{(от } P_2(\varphi_1,\varphi_2))\\
&\simeq (2+3)^x\\
&\simeq 5^x.
\end{aligned}$$

□

2.2 Задачи с упътване

Задача 2.3. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x, 1) where
  f(x, y) = if x == 0 then y
            else f(x - 1, g(x y))
  g(x, y) = if x == 0 then 0
            else g(x - 1, y) + 2*y
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq (2x)!!]$, където

$$x!! = \begin{cases} 1, & \text{ако } x < 2\\ x.(x-2)!!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

Упътване. Разгледайте свойствата:

$$P_1(f,g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y \in \mathbb{N})[!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq 2y.x];$$
$$P_2(f,g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall x,y \in \mathbb{N})[!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq y.(2x)!!].$$

□

Задача 2.4. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x, 1) where
  f(x, y) = if x == 0 then y
            else f(x - 1, g(x, y))
  g(x, y) = if x == 0 then y
            else g(x - 1, y) + 2*y
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq (2x+1)!!]$, където

$$x!! = \begin{cases} 1, & \text{ако } x < 2\\ x.(x-2)!!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

Упътване. Разгледайте ствойствата

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[\ !g(x,y) \implies g(x,y) \simeq y + 2xy];$$
$$P_3(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[\ !f(x,y) \implies f(x,y) \simeq y \cdot (2x+1)!!].$$

□

Задача 2.5. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(y) = f(0, y, y) where
  f(x, y, z) = if x == y then z
               else  f(x + 1, y, g(0, x, z))
  g(x, y, z) = if x == y then z + 1
               else g(x + 1, y, 2 + z)
```

Да се докаже, че: $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq x^2 + x]$.

Упътване. Разгледайте свойствата:

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y, z \in \mathbb{N})[\ !g(x,y,z)\ \&\ x \le y \implies g(x,y,z) \simeq 2(y-x) + z + 1];$$
$$P_2(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y, z \in \mathbb{N})[\ !f(x,y,z)\ \&\ x \le y \implies f(x,y,z) \simeq z + \sum_{u=x}^{y-1}(2u+1)].$$

□

Задача 2.6. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = g(x, x) where
  f(x, y) = if y == 0 || x == y then 1
            else f(x - 1, y - 1) + f(x - 1, y)
  g(x, y) = if y == 0 then 1
           else g(x, y - 1) + f(x, y)^2
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq \binom{2x}{x}]$.

Упътване. Използвайте, че:

- $\binom{x+y}{z} = \sum_{i=0}^{z} \binom{x}{i}\binom{y}{z-i}$;
- $\binom{x}{y} = \binom{x}{x-y}$;
- $\binom{2x}{x} = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i}\binom{x}{x-i} = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i}^2$.

□

Задача 2.7. Дадена е следната рекурсивна програма:

y ‘div‘ 2 = цялата част при деление на 2

y ‘mod‘ 2 = остатъка при деление на 2

```
h(x) = f(x, 1) where
  f(x, y) = if x == 1 then y
            else f(x - 1, y*g(x, 2*x))
  g(x, y) = if y == 0 then 1
            else if y `mod` 2 == 0 then g(x*x, y `div` 2)
              else x * g(x, y - 1)
```

Да се докаже, че:

$$(\forall x \in \mathbb{N})[x \geq 1 \;\&\; !\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq \prod_{1 \leq j \leq x} j^{2j}].$$

Упътване. Разгледайте свойствата:

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[\,!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq x^y];$$

$$P_2(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[\,!f(x,y) \;\&\; x \geq 1 \implies f(x,y) \simeq y \cdot \prod_{1 \leq j \leq x} j^{2j}];$$

□

Задача 2.8. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x, y) = g(x, y) where
  f(x, y) = if y == 0 || x == y then 1
            else f(x - 1, y - 1) + f(x - 1, y)
  g(x, y) = if y == 0 then 1
            else g(x, y - 1) + f(x + y, y)
```

Докажете, че $(\forall x, y \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x,y) \simeq \binom{x+y+1}{y}]$.

Упътване. Първо докажете, че е изпълнено тъждеството

$$\binom{x+y+1}{y} = \sum_{z=0}^{y} \binom{x+z}{z}.$$

Лесно с индукция като знаем, че за $a > b$, $\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b}$

Разгледайте свойствата:

$$P_1(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[!f(x,y) \;\&\; y \leq x \implies f(x,y) \simeq \binom{x}{y}],$$

$$P_2(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y \in \mathbb{N})[!g(x,y) \implies g(x,y) \simeq \binom{x+y+1}{y}].$$

□

Задача 2.9. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x,8,8) where
  f(x,y,z) = if x <= 1 then y
             else f(x-1, g(y^7,z^4), y)
  g(x,y) = if y == 0 then 0
           else g(x,y-1) + x
```

Докажете, че $(\forall a \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathbf{h}]\!](a) \implies \log_2(\mathcal{D}_V[\![\mathbf{h}]\!](a)) \equiv 3 \bmod 10]$.

Упътване.

- Разгледайте свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y, z \in \mathbb{N})[!f(x,y,z) \implies (\exists k, t \in \mathbb{N})[f(x,y,z) \simeq y^k z^t \;\& \; k + t \equiv 1 \bmod 10]]$$

- Друг вариант е да разгледате свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, y, z \in \mathbb{N})[!f(x,y,z) \;\&\; \log_2(y) \equiv 3 \bmod 10 \;\&\; \log_2(z) \equiv 3 \bmod 10 \implies \log_2(f(x,y,z)) \equiv 3 \bmod 10].$$

□

[2, стр. 159]

Задача 2.10. Да разгледаме следната програма:

```
g(x) = f(x, 0, x) where
  f(x, y, z) = if x == 0 then y
               else f(x - 1, y + z, z)

g'(x) = f'(x, 0) where
  f'(x,y) = if x == y then y
            else f'(x - 1, 2 * x + y - 1)
```

Докажете, че $\mathcal{D}_V[\![\text{g}]\!] = \mathcal{D}_V[\![\text{g'}]\!]$.

2.3 Допълнителни задачи

Задача 2.11. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(y) = f(0, y) where
  f(x, y) = if x == y then x
            else  f(x + 1, y) + g(0, x)
  g(x, y) = if x == y then 1
            else g(x + 1, y) + 2
```

Да се докаже, че: $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \simeq x^2 + x]$.

Задача 2.12. Да разгледаме рекурсивната програма:

```
h(x) = f(x) where
  f(x) = if x <= 1 then 4
         else g((f(x-1))^2,(f(x-2))^4)
  g(x,y) = if y == 0 then 0
           else g(x,y-1) + x
```

Докажете, че $(\forall a \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](a) \implies \log_2(\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](a)) \equiv 2 \bmod 10]$.

Задача 2.13. Да разгледаме рекурсивната програма:

```
h(x) = g(x, 0, 0) where
  f(x, y) = if y == 0 then 3^x
            else if x == y then 2^y
              else 2*f(x - 1, y - 1) + 3*f(x - 1, y)
  g(x, y, z) = if y > x then z
               else g(x, y+1, z + f(x, y))
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \simeq 5^x]$.

Задача 2.14. Да разгледаме рекурсивната програма:

```
h(x) = g(x,x) where
  f(x,y) = if y == 0 || x == y then 1
           else f(x - 1,y - 1) + f(x - 1,y)
  g(x,y) = if y == 0 then 1
           else g(x,y-1) + f(x+y,y)
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \simeq \binom{2x+1}{x}]$.

Задача 2.15. Дадена е следната рекурсивната програма:

```
h(x) = f(x) where
  f(x) = if x == 0 then 1
         else if x `rem` 2 == 0 then (f(g(x)))^2
           else 2 * (f(g(x)))^2
  g(x) = if x <= 1 then 0
         else g(x - 2) + 1
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x) \simeq 2^x]$.

Задача 2.16. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(0, x, x + 1) where
  f(x, y, z) = if x > y then z
               else f(x + 1, y, g(0, x, z))
  g(x, y, z) = if x == y then z
               else g(x + 1, y, 2 + z)
```

Да се докаже, че: $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq (x+1)^2]$.

Задача 2.17. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x) where
  f(x) = if x <= 1 then 3^x
         else g(2 * f(x - 1), 3 * f(x - 2))
  g(x, y) = if x == 0 then y
         else g(x - 1, y) + 1
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq 3^x]$.

Задача 2.18. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x) where
  f(x) = if x <= 1 then 4^x
         else g(3 * f(x - 1), 4 * f(x - 2))
  g(x, y) = if x == 0 then y
         else g(x - 1, y) + 1
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq 4^x]$.

Задача 2.19. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(2*x, 1) where
  f(x, y) = if x == 1 then y
            else f(x - 1, y * g(x, x))
  g(x, y) = if y == 0 then 1
            else if y `rem` 2 == 0 then g(x * x, y `div` 2)
              else x * g(x, y - 1)
```

Да се докаже, че:

$$(\forall x \in \mathbb{N})[x \geq 1 \ \&\ !\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq \prod_{1 \leq j \leq 2x} j^j].$$

Задача 2.20. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x, 1, 1) where
  f(x, y, z) = if x == 0 then z
               else f(x - 1, 2*y, g(y,z))
  g(y, z) = if z == 0 then 0
            else g(y, z - 1) + y
```

Докажете, че: $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq 2^{\frac{x(x-1)}{2}}]$.

Задача 2.21. Дадена е следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x, 1) where
  f(x, y) = if x == 0 then y
            else g(y, f(x - 1, 2*y))
  g(x, y) = if x == 0 then 0
            else g(x - 1, y) + y
```

Докажете, че: $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq 2^{\frac{x(x+1)}{2}}]$.

Задача 2.22. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
  h(x, y) = f(x, 2^y, 2^(y - 1)) where
    f(x, y, z) = if x == 0 then y
                 else f(x - 1, g(z,y), y)
    g(x,y) = if x == 0 then y
             else g(x - 1, y) + 2
```

Докажете, че $(\forall x, y \in \mathbb{N})[y > 0\ \&\ !\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x, y) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x, y) \simeq 2^{x+y}]$.

Задача 2.23. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x, y) = x * f(x, y) + y * g(x, y)
  f(x, y) = if x == y then 1
           else if x > y then g(y, x)
             else f(x, y - x) - g(x, y - x)
  g(x, y) = if x == y then 0
           else if x > y then f(y, x)
             else g(x, y - x)
```

Докажете, че $(\forall a, b \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a, b) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a, b) = \text{НОД}(a, b)]$.

Упътване. Разгледайте свойството

$$P(f, g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a, b \in \mathbb{N})[!f(a, b)\ \&\ !g(a, b) \implies \text{НОД}(a, b) = a \cdot f(a, b) = b \cdot g(a, b)].$$

□

Задача 2.24. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
  h(x) = f(x, 8, 8) where
    f(x, y, z) = if x <= 1 then y
                 else f(x - 1, g(y^5, z^6), y)
    g(x, y) = if y == 0 then 0
             else g(x, y - 1) + x
```

Докажете, че $(\forall a \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a) \implies \log_2(\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a)) \equiv 3 \bmod 10]$.

Задача 2.25. Да разгледаме следната рекурсивна програма:

```
h(x) = f(x,4,4) where
  f(x,y,z) = if x <= 1 then y
               else f(x - 1, g(y^2,z^4), y)
  g(x,y) = if y == 0 then 0
           else g(x,y-1) + x
```

Докажете, че $(\forall a \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a) \implies \log_2(\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](a)) \equiv 2 \bmod 10]$.

Задача 2.26. Да разгледаме следната програма:

```
h(x) = f(x, x, 0) where
  f(x, y, z) = if y == 0 then z
                 else f(x, y-1, g(x,z))
  g(x, y) = if x == 0 then y
            else g(x-1, y+1)
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \implies \mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](x) \simeq x^x]$.

Глава 3

Задачи за семантика по име

Като увод може да се прочете [1, Глава 12].

3.1 Решени задачи

Задача 3.1. Да разгледаме следната програма:

```
h(x) = f(x, x) where
  f(x, y) = if x `rem` 3 == 0 then x `div` 3
              else f(x - 1, f(2*x - 2, y))
```

Да се докаже, че $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!] \neq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{h}]\!]$.

Решение. Първо ще намерим $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!]$. Имаме оператора $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} x/3, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3 \\ f(x-1, f(2x-2, y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ще търсим елементите на монотонно растящата редица

$$\varphi_0 \subseteq \varphi_1 \subseteq \varphi_2 \subseteq \dots,$$

където $\varphi_0 = \emptyset^{(2)}$ и $\varphi_{i+1} = \Gamma(\varphi_i)$. Да пресметнем първите няколко члена на тази редица.

$$\neg!\varphi_0(x,y),\text{ за всяко } x,y\in\mathbb{N}$$

$$\varphi_1(x,y)\simeq\Gamma(\varphi_0)(x,y)$$
$$\simeq\begin{cases}x/3, & x\equiv 0 \pmod 3\\ \neg!, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\varphi_2(x,y)\simeq\Gamma(\varphi_1)(x,y)$$
$$\simeq\begin{cases}k,\ x=3k\text{ за някое }k\\ \varphi_1(3k+1-1,\varphi_1(6k+2-2,y)),\ x=3k+1\text{ за някое }k\\ \varphi_1(3k+2-1,\varphi_1(6k+4-2,y)),\ x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$
$$\simeq\begin{cases}k,\ x=3k\text{ за някое }k\\ \varphi_1(3k,\varphi_1(6k,y)),\ x=3k+1\text{ за някое }k\\ \varphi_1(3k+1,\varphi_1(6k+2,y)),\ x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$
$$\simeq\begin{cases}k,\ x=3k\text{ за някое }k\\ k,\ x=3k+1\text{ за някое }k\\ \neg!,\ x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$

$$\varphi_3(x,y)\simeq\Gamma(\varphi_2)(x,y)$$
$$\simeq\begin{cases}k, & x=3k\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k+1-1,\varphi_2(6k+2-2,y)), & x=3k+1\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k+2-1,\varphi_2(6k+4-2,y)), & x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$
$$\simeq\begin{cases}k, & x=3k\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k,\varphi_2(6k,y)), & x=3k+1\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k+1,\varphi_2(6k+2,y)), & x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$
$$\simeq\begin{cases}k, & x=3k\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k,2k), & x=3k+1\text{ за някое }k\\ \varphi_2(3k+1,\varphi_2(6k+2,y)), & x=3k+2\text{ за някое }k\end{cases}$$
$$\simeq\begin{cases}k, & x=3k\text{ за някое }k\\ k, & x=3k+1\text{ за някое }k\\ \neg!, & x=3k+2\text{ за някое }k,\end{cases}$$

защото $6k+2\equiv 2 \pmod 3$ и следователно $\neg!\varphi_2(6k+2,y)$. Получаваме, че

$$\varphi_3(x,y) \simeq \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ (x-1)/3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg !, & x \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Получаваме, че $\varphi_2 = \varphi_3$. Следователно $\varphi_2 = \bigcup_n \varphi_n$ и $\mathcal{D}_V[\![\mathbf{h}]\!](x) \simeq \varphi_2(x,x)$. Тогава за всяко $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_V[\![\mathbf{h}]\!](x) \simeq \begin{cases} \lfloor x/3 \rfloor, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3 \text{ или } x \equiv 1 \pmod 3 \\ \neg !, & \text{ако } x \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Преминаваме към намирането на денотационната семантика по име на програмата $\mathbf{h}$. Да разгледаме предиката $p(x) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ дефиниран по следния начин:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \equiv 0 \bmod 3 \\ 0, & x \not\equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

Сега разглеждаме *точното продължение* на p, което означаваме като $p^\star : \mathbb{N}_\perp \to \{0,1,\perp\}$ и има следната дефиниция:

$$p^\star(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \ \& \ x \equiv 0 \bmod 3 \\ 0, & x \in \mathbb{N} \ \& \ x \not\equiv 0 \bmod 3 \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Аналогично разглеждаме точните продължения на основните аритметични операции $+, -, \cdot, /$, които означаваме съответно като $+^\star, -^\star, \cdot^\star, /^\star$.

Сега разглеждаме изображението $\Delta : \mathcal{F}_2^\perp \to \mathcal{F}_2^\perp$, което съответства на терма дефиниращ $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned} \Delta(f)(x,y) &= \begin{cases} x /^\star 3, & \text{ако } p^\star(x) = 1 \\ f(x -^\star 1, f(2 \cdot^\star x -^\star 2, y)), & \text{ако } p^\star(x) = 0 \\ \perp, & \text{ако } p^\star(x) = \perp \end{cases} \\ &= \begin{cases} x/3, & \text{ако } x \equiv 0 \pmod 3 \\ f(x-1, f(2x-2, y)), & \text{ако } x \equiv 1 \pmod 3 \text{ или } x \equiv 2 \pmod 3 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases} \end{aligned}$$

Започваме да търсим елементите на монотонно растящата редица

$$\psi_0 \sqsubseteq \psi_1 \sqsubseteq \psi_2 \sqsubseteq \dots,$$

където $\psi_0 = \Omega^{(2)}$ и $\psi_{i+1} = \Delta(\psi_i)$. Да пресметнем първите няколко члена на тази редица.

$\psi_0(x,y) = \bot$ за всяко $x, y \in \mathbb{N}_\bot$

$$\psi_1(x,y) = \Delta(\psi_0)(x,y) = \begin{cases} x/3, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ \bot, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(x,y) &= \Delta(\psi_1)(x,y) \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ за някое } k \\ \psi_1(3k+1-1, \psi_1(6k+2-2, y)), & x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ \psi_1(3k+2-1, \psi_1(6k+4-2, y)), & x = 3k+2 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ за някое } k \\ \psi_1(3k, \psi_1(6k, y)), & x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ \psi_1(3k+1, \psi_1(6k+2, y)), & x = 3k+2 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ или } x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \text{ или } x = 3k+2 \text{ за някое } k \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3(x,y) &= \Delta(\psi_2)(x,y) \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ за някое } k \\ \psi_2(3k, \psi_2(6k, y)), & x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ \psi_2(3k+1, \psi_2(6k+2, y)), & x = 3k+2 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ за някое } k \\ \psi_2(3k, 2k), & x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ \psi_2(3k+1, \bot), & x = 3k+2 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} k, & x = 3k \text{ за някое } k \\ k, & x = 3k+1 \text{ за някое } k \\ k, & x = 3k+2 \text{ за някое } k \\ \bot, & x = \bot \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lfloor x/3 \rfloor, & x \in \mathbb{N} \\ \bot, & x = \bot \end{cases}
\end{aligned}$$

Знаем, че $\psi_3 \sqsubseteq \psi_4$. Следователно, $\psi_4(x,y) = \lfloor x/3 \rfloor$ за всяко $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}_\perp$. Освен това, $\psi_4(\perp, y) = \Delta(\psi_3)(\perp, y) = \perp$ и следователно $\psi_3 = \psi_4$. Тогава $\psi_3 = \bigsqcup_i \psi_i$ и за всяко $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_N[\![\mathbf{h}]\!](x) \simeq \begin{cases} \psi_3(x,x), & \text{ако } \psi_3(x,x) \neq \perp \\ \neg!, & \text{ако } \psi_3(x,x) = \perp \end{cases}$$

Понеже $\psi_3(x,x) = \lfloor x/3 \rfloor$ за всяко $x \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{D}_N[\![\mathbf{h}]\!](x) = \lfloor x/3 \rfloor$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. □

Задача 3.2. Нека R е следната програма над типа **Nat**:

Деф. $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

$$\begin{aligned} &F(X,Y) \quad \texttt{where} \\ &F(X,Y) = \texttt{if } X = 0 \texttt{ then } 1 \\ &\qquad\qquad\quad \texttt{else } X * F(X \dot{-} Y, F(2X, Y)) + 2. \end{aligned}$$

Докажете, че $\mathcal{D}_V(R) \subsetneqq \mathcal{D}_N(R)$!

Задача 3.3. Нека R е следната програма над типа **Nat**:

$$\begin{aligned} &F(X,Y) \quad \texttt{where} \\ &F(X,Y) = \texttt{if } 3|X \texttt{ then } \frac{X+9}{3} \\ &\qquad\qquad\quad \texttt{else } F(X*Y, F(X, Y+1)). \end{aligned}$$

Докажете, че $D_V(R) \subsetneqq D_N(R)$.

3.2 Допълнителни задачи

Задача 3.4. Да разгледаме следната програма на езика хаскел:

```
h :: Int -> Int
h(x) = f(g(x)) where
  f(x) = 42
  g(x) = if x == 0 then 0 else g(f(x))
```

Какъв ще бъде резултатът от изпълнението на програмата?

Задача 3.5. Да разгледаме следните програми:

```
f :: (Int, Int) -> Int
f(x, y) =
  if x `rem` 4 == 0 then 0
    else f(x + 2, f(x, (y + 2))) + 2

g :: (Int, Int) -> Int
g(x, y) =
  if x `rem` 4 == 0 then y
    else g(x + 2, g(x, (y + 2))) + 2
```

За всяка от тях напишете какъв резултат ще върнат съответните функции, ако бъдат извикани с аргументи $(4, 7)$, $(2, 7)$, и $(3, 7)$.

Задача 3.6. Да разгледаме следната програма:

```
foo :: (Int, Int) -> Int
foo(x, y) =
  if x `rem` 4 == 0 then 0
    else foo(x + 2, foo(x, (y + 2))) + 2
```

Докажете, че $\mathcal{D}_V[\![\text{foo}]\!] \subsetneqq \mathcal{D}_N[\![\text{foo}]\!]$!

Задача 3.7. Да разгледаме следните (частични) функции на хаскел:

```
{-# LANGUAGE BangPatterns #-}

f :: (Int, Int) -> Int
  f(!x, !y) =
    if x `rem` 4 == 0 then 0
      else f(x + 2, f(x, y + 2)) + 2

g :: (Int, Int) -> Int
  g(x, !y) =
    if x `rem` 4 == 0 then 0
      else g(x + 2, g(x, y + 2)) + 2

h :: (Int, Int) -> Int
  h(!x, y) =
    if x `rem` 4 == 0 then 0
      else h(x + 2, h(x, y + 2)) + 2
```

Обяснете каква е разликата между техните денотационни семантики по име и по стойност.

Задача 3.8. Да разгледаме следната програма:

```
lh x = f x x where
  f x y
   | x <= 1 = 1
   | x `rem` 2 == 1 = f (x - 1) y
   | otherwise = (f (x `div` 2) (f x y)) + 1
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!D_N(R)(x) \Rightarrow D_N(R)(x) \cong N(x)]$, където $N(x)$ е дължината на двоичния запис на x.

Задача 3.9. Да разгледаме следната програма:

```
h(x) = f(x, x) where
  f(x, y) = if x == 0 then 0
    else if x ‘rem‘ 2 == 1 then f(x - 1, y) + 1
      else f(x ‘div‘ 2, f(x, y + 1))
```

Докажете, че $(\forall x \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_N[\![h]\!](x) \implies \mathcal{D}_N[\![h]\!](x) \cong N_1(x)]$, където $N_1(x)$ е броят на единиците в двоичния запис на x.

Задача 3.10. Нека $D_N(R)$ е денотационната семантика по име на следната рекурсивна програма R в типа данни Nat:

```
h(x, y) = f(x, y) where
f(x, y) = if x ‘div‘ 2 == 0 then x/2
            else f((x+1)/2 + y, f(x - 1, y + 1))
```

Докажете, че $(\forall x, y \in \mathbb{N})[!\mathcal{D}_N[\![h]\!](x, y) \implies \mathcal{D}_N[\![h]\!](x, y) \simeq x + y]$.

Упътване.

$$\Delta(f)(x, y) = \begin{cases} x/^\star y, & x \equiv 0 \pmod 2 \\ f((x +^\star 1)/^\star 2 +^\star y, f(x -^\star 1, y +^\star 1)), & x \equiv 1 \pmod 2 \\ \perp, & x = \perp \end{cases}$$

Разгледайте свойствата:

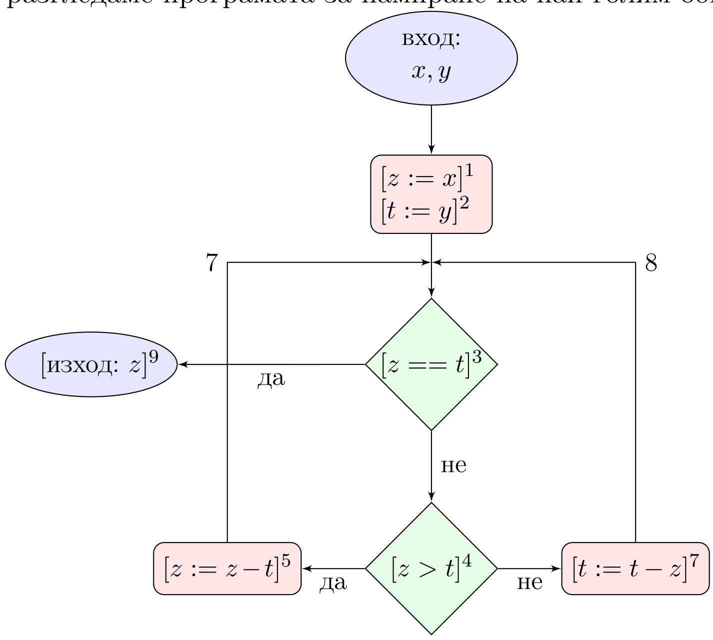
- $P_1(f) \iff (\forall x, y)[f(x, y) \neq \perp \;\&\; x \equiv 0 \pmod 2 \;\Rightarrow\; f(x, y) = x/2]$;
- $P_2(f) \iff (\forall x, y)[f(x, y) \neq \perp \;\&\; x \equiv 1 \pmod 2 \;\Rightarrow\; f(x, y) \leq x + y]$;
- $P_3(f) \iff (\forall y \in \mathbb{N}_\perp)[f(\perp, y) = \perp]$;
- $P_4(f) \iff (\forall x \in \mathbb{N})[x \equiv 1 \pmod 2 \;\Rightarrow\; f(x, \perp) = \perp]$.

За свойството $P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$, докажете, че $P(\delta)$, където δ е най-малката неподвижна точка на Δ. $\square$

Глава 4

Опашкови функции

Да разгледаме програмата за намиране на най-голям общ делител.



Програмата може да се представи по следния начин:

1: $z := x$
2: $t := y$
3: **if** $z = t$ **then** goto 9 **else** goto 4
4: **if** $z > t$ **then** goto 5 **else** goto 7
5: $z := z - t$
6: goto 3
7: $t := t - z$
8: goto 3
9: stop

Да видим сега тази императивна програма как може директно да се преведе на функционален език като хаскел.

```
gcd(x,y) = f1(x,y,0,0) where -- input x, y
  f1(x,y,z,t) = f2(x,y,x,t) -- z := x
  f2(x,y,z,t) = f3(x,y,z,y) -- t := y
  f3(x,y,z,t) = if z == t then f9(x,y,z,t) -- goto 9
                  else f4(x,y,z,t) -- goto 4
  f4(x,y,z,t) = if z > t then f5(x,y,z,t)  -- goto 5
                  else f7(x,y,z,t) -- goto 7
  f5(x,y,z,t) = f6(x,y,z-t,t) -- z := z - t
  f6(x,y,z,t) = f3(x,y,z,t) -- goto 3
  f7(x,y,z,t) = f8(x,y,z,t-z) -- t := t - z
  f8(x,y,z,t) = f3(x,y,z,t) -- goto 3
  f9(x,y,z,t) = z -- output z
```

Естествено, можем да направим много опростявания в горната програма.

```
gcd(x,y) = f1(x,y,0,0) where -- input x, y
  f1(x,y,z,t) = f3(x,y,x,y) -- z := x; t := y
  f3(x,y,z,t) = if z == t then z -- output z
                  else f4(x,y,z,t) -- goto 4
  f4(x,y,z,t) = if z > t then f6(x,y,z-t,t)  -- z := z - t
                  else f8(x,y,z,t-z) -- t := t - z
  f6(x,y,z,t) = f3(x,y,z,t) -- goto 3
  f8(x,y,z,t) = f3(x,y,z,t) -- goto 3
```

Можем още да опростим.

```
gcd(x,y) = f1(x,y,0,0) where -- input x, y
  f1(x,y,z,t) = f3(x,y,x,y) -- z := x; t := y
  f3(x,y,z,t) = if z == t then z -- output z
                else if z > t then f3(x,y,z-t,t)  -- z := z - t
                  else f3(x,y,z,t-z) -- t := t - z
```

Лесно се вижда, че променливите x и y се използват единствено като първоначалните стойности на z и t.

```
gcd(x,y) = f1(x,y) where
  f1(x,y) = f3(x,y)
  f3(x,y) = if x == y then x
                else if x > y then f3(x-y,y)
                  else f3(x,y-x)
```

Накрая получаваме следната програма:

```
gcd(x,y) = f(x,y) where
  f(x,y) = if x == y then x
                else if x > y then f(x-y,y)
                  else f(x,y-x)
```

- Нека $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ са непрекъснати изображения.
  - Вярно ли е, че
  $$\mathrm{lfp}(g \circ f) \sqsubseteq g(\mathrm{lfp}(f \circ g))?$$
  - Вярно ли е, че
  $$\mathrm{lfp}(f \circ g) \sqsubseteq f(\mathrm{lfp}(g \circ f))?$$
- Докажете, че $f : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ е непрекъснато изображение точно тогава, когато е изпълнено едно от двете:
  - f е точна, т.е. $f(\perp) = \perp$, или
  - f е константна, т.е. $f(x) = f(\perp)$, за всяко $x \in \mathbb{N}$.

Библиография

[1] Graham Hutton. *Programming in Haskell.* Cambridge, 2007.

[2] Стела Николова и Александра Соскова. *Семантика на езиците за програмиране. Ръководство.* СОФТЕХ, 2008.