АКСИОМАТИЧНА ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

Андрей К. Сариев

2022

Аксиоматична Теория на Множествата: ZFC

На Димана

Съдържание

Глава 1

Аксиоматична система на Zermelo-Fraenkel (ZF)

1А. Език и логически аксиоми

Езикът на теорията ни се състои от:

- индивидни променливи: $\mathrm{a, b, c, \ldots, x, y, z, A, B, C, \ldots}$;
- два двуместни предикатни символа: $=$ и $\in$;
- логически символи: $\neg$, $\vee$, $\wedge$,$\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$;
- помощни символи: (,), [,];

(1) $(\forall\,\mathrm{x})[\mathrm{x} = \mathrm{x}]$;
(2) $(\forall\,\mathrm{x})(\forall\,\mathrm{y})[(\mathrm{x} = \mathrm{y}) \rightarrow (\mathrm{y} = \mathrm{x})]$;
(3) $(\forall\,\mathrm{x})(\forall\,\mathrm{y})(\forall\,\mathrm{z})[(\mathrm{x} = \mathrm{y})\ \&\ (\mathrm{y} = \mathrm{z}) \rightarrow (\mathrm{x} = \mathrm{z})]$;
(4) $(\forall\,\mathrm{x})(\forall\,\mathrm{x}')(\forall\,\mathrm{y})[(\mathrm{x} = \mathrm{x}')\ \&\ (\mathrm{x}' \in \mathrm{y}) \rightarrow (\mathrm{x} \in \mathrm{y})]$;
(5) $(\forall\,\mathrm{x})(\forall\,\mathrm{y})(\forall\,\mathrm{y}')[(\mathrm{x} \in \mathrm{y})\ \&\ (\mathrm{y} = \mathrm{y}') \rightarrow (\mathrm{x} \in \mathrm{y}')]$.

1Б. Аксиоматика на системата ZF

В този раздел последователно ще въведем аксиомите на системата на Zermelo-Frenkel (ZF). При добавянето на нова аксиома ще разсъждаваме по какъв начин се разширява вселената ни от множества. Като начало, искаме тази вселена да не бъде празна.

Аксиома I. *Съществува поне едно множество.*

$$(\exists\,x)[x = x].$$

Разбира се, от тази аксиома не можем да съдим нищо конкретно за това множество. Нещо повече, все още не сме в състояние да различим дали в нашата вселена има различни множества. Това, обаче, ни дава следващата аксиома. Според нея, едно множество напълно се определя от съдържимите в него елементи.

Аксиома II (за обемност)**.** *Ако две множества имат едни и същи елементи, то те са равни.*

$$(\forall\,x)(\forall\,y)[(\forall\,z)[z \in x \leftrightarrow z \in y] \rightarrow x = y].$$

Разбира се, вярно е и обратното, а именно, че ако две множества са равни, то те имат едни и същи елементи. Действително, нека $\mathrm{x} = \mathrm{y}$. Нека z е произволен елемент на x. Така имаме $\mathrm{z} \in \mathrm{x}$ и $\mathrm{x} = \mathrm{y}$, откъдето последната от логическите аксиоми ни дава, че $\mathrm{z} \in \mathrm{y}$. Следователно, всеки елемент на x е такъв и на y. По аналогичен начин се показва и, че всеки елемент на y е елемент и на x. Следователно,

$$(\forall\,\mathrm{x})(\forall\,\mathrm{y})[(\forall\,\mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{x} \leftrightarrow \mathrm{z} \in \mathrm{y}] \leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}].$$

По-нататък, ако x и y са множества, ще използваме означението $\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y}$ за да укажем, че всеки елемент на x е такъв и на y,

$$\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y} \leftrightharpoons (\forall\,\mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{x} \to \mathrm{z} \in \mathrm{y}].$$

Упражнение 1Б.1. *Докажете, че $x = y \leftrightarrow x \subseteq y \;\&\; y \subseteq x$.*

Използвайки, само горните две аксиоми не можем да кажем много за вселената ни от множества. В действителност, сме неспособни нито да докажем, нито да опровергаем съществуването на празно множество. Наистина, горните аксиоми имат модел вселена, състояща се единствено от едно празно множество (т.е. без елементи). В същото време, имат и модел вселена, състояща се от едно единствено множество Ω, което от своя страна има себе си като единствен елемент, $\Omega \in \Omega$. Но така и Ω не може да бъде празно.

1В. Аксиомна схема за отделянето

Както видяхме вече, ако $\varphi(\mathrm{x}, \overline{u})$ е теоретико-множествено свойство (тук $\overline{u} = \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n$), то в общия случай не можем да очакваме отделяйки множествата, удовлетворяващи φ, да получим множество. Следващата аксиомна схема ни гарантира, обаче, че отделяйки от дадено множество A елементите му, удовлетворяващи φ, то отново ще получим множество.

За всяко теоретико-множествено свойство $\varphi(\mathrm{x}, \overline{u})$ въвеждаме следната аксиома.

Аксиома III (φ, аксиомна схема за отделянето)**.** *Нека $A, u_1, u_2, \ldots, u_n$ са множества. Тогава съществува множество, чиито елементи са онези елементи на A, за които свойството $\varphi(x, \overline{u})$.*

$$(\forall\,A)(\forall\,u_1)\ldots(\forall\,u_n)(\exists\,B)(\forall\,z)[z \in B \leftrightarrow \varphi(z, \overline{u}) \;\&\; z \in A].$$

Нещо повече, аксиомата за обемност ни дава, че споменатото погоре множество е и единствено.

Твърдение 1В.1. *При фиксирани φ, A и $\overline{u}$ има единствено множество B такова, че* $(\forall z)[z \in B \leftrightarrow \varphi(z,\overline{u})\ \&\ z \in A]$.

Доказателство. Нека B_1 и B_2 са множества, за които е изпълнено $(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{B}_1 \leftrightarrow \varphi(\mathrm{z},\overline{u})\ \&\ \mathrm{z} \in \mathrm{A}]$ и $(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{B}_2 \leftrightarrow \varphi(\mathrm{z},\overline{u})\ \&\ \mathrm{z} \in \mathrm{A}]$. Нека z е произволно множество. Нека $\mathrm{z} \in \mathrm{B}_1$. Но $\mathrm{z} \in \mathrm{B}_1 \leftrightarrow \varphi(\mathrm{z},\overline{u})\ \&\ \mathrm{z} \in \mathrm{A}$. Следователно, $\varphi(\mathrm{z},\overline{u})\ \&\ \mathrm{z} \in \mathrm{A}$, откъдето $\mathrm{z} \in \mathrm{B}_2$. ⊣

Това единствено множество B ще бележим с:

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{z} \ \mid\ \mathrm{z} \in \mathrm{A}\ \&\ \varphi(\mathrm{z},\overline{u})\}.$$

1В.1. Съществуване и единственост на празно множество. Добавянето на аксиомната схема за отделянето вече ни гарантира съществуването на множество без елементи. Действително, съгласно аксиомата за съществуване, има поне едно множество. Нека C е такова. Да разгледаме свойството $\varphi(\mathrm{x}) \leftrightharpoons \mathrm{x} \neq \mathrm{x}$. Съгласно предходното твърдение, съществува единствено множество B такова, че $(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{z} \in \mathrm{C}\ \&\ \varphi(\mathrm{z})]$. Ще докажем, че $(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \notin \mathrm{B}]$. За целта, нека z е произволно множество. Да допуснем, че $\mathrm{z} \in \mathrm{B}$. Тогава $\mathrm{z} \in \mathrm{C}\ \&\ \varphi(\mathrm{z})$, т.е. $\mathrm{z} \in \mathrm{C}\ \&\ \mathrm{z} \neq \mathrm{z}$. Противоречие с първата от логическите аксиоми. Следователно, $\mathrm{z} \notin \mathrm{B}$. Тъй като z беше произволно, то $(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \notin \mathrm{B}]$.

Така получихме наличието на празно множество в нашата вселена. Възможно ли е, обаче, тръгвайки от друго начално множество и отделящо свойство да получим различно от B празно множество? Отново аксиомата за обемност ни дава единственост на множеството без елементи. Действително, нека B_1 и B_2 са такива множества, че $(\forall \mathrm{z})(\mathrm{z} \notin \mathrm{B}_1)$ и $(\forall \mathrm{z})(\mathrm{z} \notin \mathrm{B}_2)$. Тогава за произволно z е изпълнено, че $\mathrm{z} \in \mathrm{B}_1 \leftrightarrow \mathrm{z} \in \mathrm{B}_2$. Следователно, множествата B_1 и B_2 са равни.

Така получихме, че $(\exists! \mathrm{B})(\forall \mathrm{z})[\mathrm{z} \notin \mathrm{B}]$. За напред, както е обичайно, ще бележим това единствено празно множество с $\varnothing$. Тъй като $\varnothing$ няма никакви елементи, то за всяко множество A,

$$(\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \varnothing \to \mathrm{x} \in \mathrm{A}],$$

откъдето

$$\varnothing \subseteq \mathrm{A}.$$

Оказва се, че нашата аксиоматична система е все още много бедна – освен празното множество не е възможно да се докаже или опровергае наличието на други множества. Действително, не е трудно да се провери, че вселената, състояща се единствено от празното множество е модел на горните аксиоми.

1B.2. Множеството на всички множества. Използвайки парадокса на Ръсел и аксиомната схема за отделяне, можем да покажем, че в нашата вселена не може да съществува обект, съдържащ като елементи всички обекти. С други думи, не съществува множество на всички множества,

$$\neg(\exists\, \mathrm{B})(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B}].$$

За да докажем това, да допуснем противното. Нека тогава B е такова множество, че $(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B}]$. Съгласно аксиомната схема за отделянето

$$\mathrm{R} = \{\mathrm{x} \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \&\ \mathrm{x} \notin \mathrm{x}\}$$

е множество (отделяме от B всички елементи x, със свойството $\mathrm{x} \notin \mathrm{x}$). Не е трудно да се съобрази, че $\mathrm{R} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{R} \notin \mathrm{R}$, което е противоречие. Следователно допускането ни е погрешно. Тогава $\neg(\exists\, \mathrm{B})(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B}]$.

1B.3. Операциите $\cap$ и $\setminus$. Макар, че все още не можем да гарантираме наличието на друго множество освен $\varnothing$, можем да докажем затвореността на операциите $\cap$ и $\setminus$. Наистина, нека A и B са множества. Тогава, според аксиомната схема за отделянето, съществува множество C което съдържа общите за A и B елементи,

$$(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \&\ \mathrm{x} \in \mathrm{B}].$$

Понеже принадлежността към C се определя от условие, зависещо единтвено от A и B, то е ясно, че множестовото описано от това свойство е единствено. Както е обичайно, това единствено множество ще бележим с $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Отново аксиомната схема за отделянето ни дава и наличието на множество C, което съдържа онези елементи на A, които са извън B,

$$(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \&\ \mathrm{x} \notin \mathrm{B}].$$

Понеже принадлежността към това множество се описва единствено чрез A и B, не е трудно да се забележи, че то е и единствено. За напред ще означаваме това единствено множество по обичайния начин $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$.

Нека сега A е множество. В случая, когато $\mathrm{A} \neq \varnothing$, съществува единствено множество B съдържащо точно множествата, които са елементи на всеки един от елементите на A,

$$(\forall\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{B} \leftrightarrow (\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{z} \in \mathrm{x}]].$$

Единствеността на това множество следва от това, че принадлежността към него е описана чрез условие зависещо само от A. Съществуването му пък, произтича от аксиомната схема за замяна. Нека $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{A}$

е произволен. Тогава, има единствено множество

$$\mathrm{B}' = \{\mathrm{z} \ \mid \ \mathrm{z} \in \mathrm{x}_0 \ \& \ (\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \to \mathrm{z} \in \mathrm{x}]\}.$$

Директната проверка установява, че B' в действителност съдържа само множествата, които са елементи на всеки един от елементите на A. По-нататък, това единствено множество ще бележим с $\cap\mathrm{A}$.

Упражнение 1В.2. *Докажете формално, че $B = B'$.*

Какво, обаче, ще стане ако запазим тази дефиниция, когато $\mathrm{A} = \varnothing$? Имаме, че $(\forall\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \cap\mathrm{A} \leftrightarrow (\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \varnothing \to \mathrm{z} \in \mathrm{x}]]$, което е еквивалентно на $(\forall\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \cap\mathrm{A}]$. С други думи, множеството $\cap\varnothing$ ще съдържа като елемент всяко множество. Последното, разбира се, е нещо което показахме като невярно. Можем да оставим операцията недефинирана върху $\varnothing$, ала нашият избор е да доопределим $\cap$ върху празното множество като $\cap\varnothing = \varnothing$.

1Г. Аксиома за чифта

С помоща на следващата аксиома съществено ще разширим света на множествата. Именно, тя ще гарантира, че всеки модел на аксиомите трябва да съдържа *безброй много* множества.

Аксиома IV (Аксиома за чифта)**.** *За всеки две множества a и b съществува множество A, измежду чийто елементи са a и b,*

$(\forall\, a)(\forall\, b)(\exists\, A)[a \in A \ \& \ b \in A]$.

Оттук, с помоща на аксиомната схема за отделяне, получаваме, че има единствено множество, което съдържа точно a и b.

Твърдение 1Г.1. *За всеки две множества a и b, съществува единствено множество A такова, че*

$(\forall\, x)[x \in A \leftrightarrow x = a \ \vee \ x = b]$.

Доказателство. Нека a и b са произволни и B е такова, че $\mathrm{a} \in \mathrm{B}$ и $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$. Нека $\varphi(\mathrm{z}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) \leftrightharpoons \mathrm{z} = \mathrm{a} \ \vee \ \mathrm{z} = \mathrm{b}$. Тогава аксиомната схема за отделянето приложена за φ ни гарантира наличието на множеството

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{z} \ \mid \ \mathrm{z} \in \mathrm{B} \ \& \ \varphi(\mathrm{z}, \mathrm{a}, \mathrm{b})\}.$$

Тогава $(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{a} \ \vee \ \mathrm{x} = \mathrm{b}]$. Наистина, нека x е произволно множество. Нека $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$. Тогава $\mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \& \ \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$, в частност $\mathrm{x} = \mathrm{a} \ \vee \ \mathrm{x} = \mathrm{b}$. Нека обратно $\mathrm{x} = \mathrm{a} \ \vee \ \mathrm{x} = \mathrm{b}$. Тогава $\mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \& \ \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$ и така $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$.

Единствеността на това множество следва от аксиомата за обемност и факта, че условието за принадлежност към него зависи само от a и b. $\dashv$

За напред, това единствено множество ще наричаме *чифт* на a и b и ще бележим с $\{a, b\}$. Ако $a = b$, то чифта $\{a, a\}$ ще означаваме с $\{a\}$. Този чифт ще наричаме *синглетон* на a.

Обърнете внимание, че „x е синглетон“ е изразимо в езика на теория на множествата:

$$\text{x е синглетон} \Leftrightarrow (\exists\, a)[x = \{a\}] \Leftrightarrow (\exists\, a)(\forall\, z)[z \in x \leftrightarrow z = a].$$

Упражнение 1Г.2. *Докажете, че за всеки две множества A и B, е в сила, че $A \cap B = \cap\{A, B\}$.*

Аксиомата за чифта и наличието на празно множество, ни гарантират че в нашата вселена присъстват и множествата

$$\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \ldots$$

Да забележим, че $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, понеже $\varnothing \notin \varnothing$, но $\varnothing \in \{\varnothing\}$. По същия начин, $\{\{\varnothing\}\}$ не е равно нито на $\varnothing$, нито на $\{\varnothing\}$. $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ не е равно нито на $\varnothing$, нито на $\{\varnothing\}$, нито на $\{\{\varnothing\}\}$. Разсъждавайки аналогично, може да се види, че всички множества от горната редица са различни помежду си. Следователно, всяка вселена, удовлетворяваща аксиомите, трябва да съдържа безброй много множества.

Уви, аксиомите до момента не са достатъчни, за да гарантират наличието на безкрайно множество. Всъщност, можем единствено да гарантираме, наличието на множества с не повече от два елемнта.

1Г.1. Наредени двойки. Тъй като, по аксиомата за обемност, всяко множество еднозначно се определя от своите елементи, то винаги чифтът на a и b е същият като този на b и a, $\{a, b\} = \{b, a\}$. Изниква въпросът дали можем в термините на теория на множествата да определим понятието *наредена двойка*, т.е. такъв обект, в който освен елементите му, определящ е и техния ред. С други думи, можем ли да определим като множество (зависещо от x и y), обект $\langle x, y\rangle$ такъв, че:

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \leftrightarrow x_1 = x_2 \ \&\ y_1 = y_2.$$

Отговорът, разбира се, е положителен и има много решение. Ние тук ще вземем това, дадено от Kuratowski.

Определение 1Г.3. *Наредена двойка на множествата x и y ще наричаме множеството $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ и ще означаваме с $\langle x, y\rangle$.*

Твърдение 1Г.4. *За всеки четири множества x_1, x_2, y_1, y_2,*

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \leftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2.$$

Доказателство. ($\leftarrow$) Нека $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ и $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$. Тогава $\{\mathrm{x}_1\} = \{\mathrm{x}_2\}$ и $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\} = \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}$, откъдето $\{\{\mathrm{x}_1\}, \{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\}\} = \{\{\mathrm{x}_2\}, \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}\}$.

($\rightarrow$) Нека $\langle \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\rangle = \langle \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\rangle$. Ако $\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$, то

$$\langle \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\rangle = \{\{\mathrm{x}_1\}\} = \{\{\mathrm{x}_2\}, \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}\}.$$

Тогава $\langle \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\rangle$ също трябва да е едноелементно, т.е. $\{\mathrm{x}_2\} = \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}$, откъдето $\mathrm{x}_2 = \mathrm{y}_2$. Така $\{\{\mathrm{x}_1\}\} = \{\{\mathrm{x}_2\}\}$ и, следователно, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_2 = \mathrm{y}_2$.

Ако пък $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{y}_1$, то $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\}$ е двуелементно и, следователно, $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\} = \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}$, защото не може да бъде равно на $\{\mathrm{x}_2\}$. Тогава остава $\{\mathrm{x}_1\} = \{\mathrm{x}_2\}$, откъдето $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Така получаваме, $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\} = \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_1\} = \{\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\}$, откъдето намираме и, че $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$. $\dashv$

Следващата аксиома ще разшири още малко света ни, като за всяко естествено число n ни гарантира наличието на множество с точно n елемента.

Аксиома V (Аксиома за обединението)**.** *За всяко множество A съществува множество B, такова че всички елементи на елементите на A са негови елементи,*

$$(\forall\, A)(\exists\, B)(\forall\, x)(\forall\, y)[x \in y \;\&\; y \in A \rightarrow x \in B].$$

Отново, използвайки аксиомната схема за отделянето, можем да получим множеството, което се състои точно от елементите на елементите на A.

Твърдение 1Г.5. *За всяко множество A, съществува единствено множество B, такова че:*

$$(\forall\, z)[z \in B \leftrightarrow (\exists\, y)[y \in A \;\&\; z \in y]].$$

Доказателство. Нека A е произволно множество. Нека C е някакво множество, което съдържа елементите на елементите на A. Нека $\varphi(\mathrm{z}, \mathrm{A}) \leftrightharpoons (\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{A}]$. Отделяйки от C, онези елементи, удовлетворяващи φ, получаваме множеството $\mathrm{B} = \{\mathrm{z} \mid \mathrm{z} \in \mathrm{C} \;\&\; (\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{A}]\}$.

Нека z е произволно множество. Нека първо $\mathrm{z} \in \mathrm{B}$. Тогава имаме, че $\mathrm{z} \in \mathrm{C} \;\&\; (\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{A}]$, в частност $(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{A}]$. Нека сега имеме, че $(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{A}]$. Тогава z е елемент на елемент на A и, следователно, е елемент и на C. Тогава $\mathrm{z} \in \mathrm{C}\ \&\ (\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{z} \in \mathrm{y}\ \&\ \mathrm{y} \in \mathrm{A}]$, откъдето $\mathrm{z} \in \mathrm{B}$. Понеже z беше произволно, то

$$(\forall\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{B} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{A}\ \&\ \mathrm{z} \in \mathrm{y}]].$$

Ясно е също, по аксиомата за обемност, че ако имаме две множества, принадлежността към които е определена по-горния начин, то те непременно съвпадат. $\dashv$

По-нататък това единствено множество ще означаваме чрез $\cup\mathrm{A}$.

Упражнение 1Г.6. *Докажете, че за всеки две множества A и B, е в сила, че* $(\forall\, x)[x \in \cup\{A, B\} \leftrightarrow x \in A\ \vee\ x \in B]$.

За напред, ще използваме обичайното означение $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ вместо $\cup\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.

Както видяхме по-рано допълнението на $\varnothing$ (т.е. съвкупността на всички множества извън $\varnothing$) не представлява множество, защото иначе би съдържало всяко множество. Аксиомата за обединението ни позволява да разширим този резултат, като покажем, че операция за допълнение не може да бъде дефинирана в нашата вселена.

Твърдение 1Г.7. *За никое множество A не съществува множество $\overline{A}$ такова, че*

$$(\forall\, x)[x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A].$$

Доказателство. Да допуснем, че A и $\overline{\mathrm{A}}$ са такива множества, че $(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \overline{\mathrm{A}} \leftrightarrow \mathrm{x} \notin \mathrm{A}]$. Тогава, по аксиомите за чифта и обединението, $\mathrm{V} = \cup\{\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\}$ отново е множество. Не е трудно да се съобрази, че V съдържа всяко множество. Противоречие. $\dashv$

Сега да видим, че аксиомата за обединението гарантира, че в нашата вселена има множество с n елемента за всяко естествено число n. За $n = 0$, празното множество $\varnothing$ върши работа. Да означим $\overline{0} = \varnothing$. Ясно е, че $\overline{0}$ не съвпада с никой свой елемент. Да предположим, че за някое n, сме построили множество $\overline{n}$ с n елемента, което не съвпада с никой свой елемент. Дефинираме множеството $\overline{n+1} = \overline{n} \cup \{\overline{n}\}$. Тогава $\overline{n+1}$ има $n+1$ елемента и не съвпада с никой свой елемент.

1Д. Аксиома за степенното множество

Аксиома VI (Аксиома за степенното множество)**.** *За всяко множество A, съществува такова множество, сред чиито елементи са всички подмножества на A,*

$$(\forall\, A)(\exists\, B)(\forall\, x)[x \subseteq A \rightarrow x \in B].$$

Както и по-рано, използвайки аксиомната схема за отделянето, можем да покажем, че за всяко множество A съществува единствено множество B, състоящо се точно от подмножествата на A,

$$(\forall \mathrm{A})(\exists! \mathrm{B})(\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{x} \subseteq \mathrm{A}].$$

Упражнение 1Д.1. *Докажете горното твърдение.*

По-нататък, това единствено множество ще означаваме чрез $\mathcal{P}(\mathrm{A})$,

$$\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \subseteq \mathrm{A}\},$$

и ще наричаме *степенно множество* на A.

Нека A е произволно множество. Тогава $\varnothing \subseteq \mathrm{A}$ и $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}$, откъдето $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathrm{A})$ и $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{A})$. Следователно, $\cap\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \varnothing$ и $\cup\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. Освен това, ако $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, то $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{B})$.

Възможно ли е да има множество A, такова че $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{A}$? Да допуснем, че A е такова. Тогава аксиомната схема за отделянето ни дава множеството

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{A}} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{x} \notin \mathrm{x}\}.$$

Разбира се $\mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \subseteq \mathrm{A}$, откъдето $\mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}(\mathrm{A})$. Но тогава $\mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \in \mathrm{A}$. Точно както при парадокса на Ръсел получаваме, че $\mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \leftrightarrow \mathfrak{R}_{\mathrm{A}} \notin \mathfrak{R}_{\mathrm{A}}$. Противоречие. Следователно за всяко A, $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \not\subseteq \mathrm{A}$.

Как стоят нещата при обратното включване $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{A})$? Тъй като празното множество е подмножество на всяко друго множество имаме, че $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(\varnothing)$. Следователно,

$$(\exists \mathrm{A})[\mathrm{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{A})].$$

Нека сега $\mathrm{A} = \{\{\varnothing\}\}$. Тогава $\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ и така $\mathrm{A} \not\subseteq \mathcal{P}(\mathrm{A})$. Следователно,

$$(\exists \mathrm{A})[\mathrm{A} \not\subseteq \mathcal{P}(\mathrm{A})].$$

Свойствата на множествата, които са подмножества на своето степенно множество са разгледани в следващия раздел.

1Е. Транзитивни множества

Следващото определение е въведено от von Neuman.

Определение 1Е.1. *Ще казваме, че z е транзитивно множество, ако $z \subseteq \mathcal{P}(z)$.*

С други думи, множеството z е транзитивно тогава и само тогава, когато всеки негов елемент е и негово подмножество,

$$(\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{z} \rightarrow \mathrm{x} \subseteq \mathrm{z}].$$

Оттук получаваме, че z е транзитивно тогава и само тогава, когато съдържа всеки елемент на всеки негов елемент,

$$(\forall\, \mathrm{x})(\forall\, \mathrm{y})[\mathrm{x} \in \mathrm{z} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{x} \to \mathrm{y} \in \mathrm{z}].$$

Непосредствено от последното, и имайки предвид, че $\cup\mathrm{z}$ се състои именно от елементите на елементите на z, получаваме следващото твърдение.

Твърдение 1E.2. *Множеството z е транзитивно тогава и само тогава, когато $\cup z \subseteq z$.*

Следващата лема обхваща основните свойства на транзитивните множества, които ще ни бъдат от полза и занапред. Ще използваме означението trans(x), за да означим, че множеството x е транзитивно – от казаното до тук е видно, че това свойство е изразимо в езика на теория на множествата. Още, с S(x) ще означаваме множеството $\mathrm{x} \cup \{\mathrm{x}\}$, което ще наричаме *наследник* на x.

Лема 1E.3. *Нека x е множество. Тогава:*

(1) $\mathit{trans}(x) \to \mathit{trans}(\cup x)$;
(2) $(\forall\, y)[y \in x \to \mathit{trans}(y)] \to \mathit{trans}(\cup x)$;
(3) $(\forall\, y)[y \in x \to \mathit{trans}(y)] \to \mathit{trans}(\cap x)$;
(4) $\mathit{trans}(x) \to \mathit{trans}(S(x))$;
(5) $\mathit{trans}(x) \to \mathit{trans}(\mathcal{P}(x))$.

Доказателство.

(1) Нека x е транзитивно множество и $\mathrm{y} \in \cup\mathrm{x}$. Тогава

$$(\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{x} \;\&\; \mathrm{y} \in \mathrm{z}].$$

По транзитивността на x получаваме, че $\mathrm{y} \in \mathrm{x}$. Следователно, $\mathrm{y} \subseteq \cup\mathrm{x}$. Така, $\cup\mathrm{x}$ също е транзитивно.

(2) Нека всеки елемент на x е транзитивно множество. Нека $\mathrm{z} \in \cup\mathrm{x}$ е произволен. Тогава z е елемент на някой елемент на x. Нека y е един такъв елемент на x, $\mathrm{z} \in \mathrm{y}$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{x}$. Но y е транзитивно, следователно $\mathrm{z} \subseteq \mathrm{y}$. От друга страна, понеже $\mathrm{y} \in \mathrm{x}$, то $\mathrm{y} \subseteq \cup\mathrm{x}$. Така получаваме, че $\mathrm{z} \subseteq \cup\mathrm{x}$. Следователно $\cup\mathrm{x}$ е транзитивно.

(3) Нека всеки елемент на x е транзитивно множество. Нека първо $\mathrm{x} = \varnothing$. Тогава $\cap\mathrm{x} = \varnothing$, което е транзитивно множество. Нека сега x не е празното множество. Нека $\mathrm{z} \in \cap\mathrm{x}$ е произволен. Тогава z е елемент на всеки елемент на x,

$$(\forall\, \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{x} \to \mathrm{z} \in \mathrm{y}].$$

Понеже всеки елемент на x е транзитивно множество, то

$$(\forall \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{z} \subseteq \mathrm{y}].$$

Следователно z съдържа само елементи, които са общи за всички елементи на x. Тогава $\mathrm{z} \subseteq \bigcap \mathrm{x}$ и така $\bigcap \mathrm{x}$ е транзитивно.

(4) Нека x е транзитивно множество и $\mathrm{y} \in \mathrm{S}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \cup \{\mathrm{x}\}$. Нека първо $\mathrm{y} \in \mathrm{x}$. От транзитивността на x имаме, че $\mathrm{y} \subseteq \mathrm{x}$. Но $\mathrm{x} \subseteq S(\mathrm{x})$, откъдето $\mathrm{y} \subseteq \mathrm{S}(\mathrm{x})$. Нека сега $\mathrm{y} \in \{\mathrm{x}\}$. Но тогава $\mathrm{y} = \mathrm{x} \subseteq \mathrm{S}(\mathrm{x})$.

(5) Нека x е транзитивно множество. Тогава $\mathrm{x} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{x})$. От монотонността на операцията за степенно множество получаваме, че $\mathcal{P}(\mathrm{x}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{x}))$. Следователно множеството $\mathcal{P}(\mathrm{x})$ също е транзитивно.

⊣

1Ж. Аксиома за фундираност

За да изключи възможността множество да бъде свой собствен елемент, както и да се изключи възможността за $\in$-цикли, т.е. $a_1 \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_1$, Zermelo включва Аксиомата за фундираност (за регулярност), според която всяко непразно множество притежава $\in$-минимален елемент.

Аксиома VII (AF). *Всяко непразно множество a съдържа множество x, такова че нито един елемент на x не е елемент на a,*

$$(\forall a)[a \neq \varnothing \rightarrow (\exists x)[x \in a \ \& \ x \cap a = \varnothing]].$$

Лема 1Ж.1. $(\forall a)[a \notin a]$.

Доказателство. Да предположим, че a е такова множество, че $a \in a$. Понеже $\{a\}$ е непразно множество, трябва да има такъв елемент x, че $x \cap \{a\} = \varnothing$. Но единственият елемент на $\{a\}$ е a. Следователно, $a \cap \{a\} = \varnothing$. Обаче, $a \in a$ и $a \in \{a\}$. Противоречие. ⊣

По подобен начин може да докажем за всяко естествено число n, че не съществува $\in$-цикъл с дължина n:

$$a_1 \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_1.$$

1З. Аксиома за безкрайност

Аксиомите до момента не гарантират наличието на некрайни множества в нашия свят. Това се променя от следващата аксиома, според която съществува *индуктивно* множество. По-точно, под индуктивно ще разбираме множество съдържащо $\varnothing$, което заедно с всеки свой елемент x съдържа и $x \cup \{x\}$. Предвид (**AF**), $x \neq x \cup \{x\}$ и $x \cup \{x\}$ е различно от всеки елемент на x. По този начин нито едно индуктивно множество не може да бъде крайно.

Аксиома VIII (Аксиома за безкрайност)**.**

$$(\exists\, a)[\varnothing \in a \;\&\; (\forall\, x)[x \in a \to x \cup \{x\} \in a]].$$

1И. Аксиомна схема за замяната

Глава 2

Съответствия

2А. Декартови произведения

Аксиомата за степенното множество развива света ни като добавя към него и декартовите произведения. Декартовото произведение $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ на множествата A и B се състои от наредените двойки, чийто първи елемент е от A, а вторият – от B. Без аксиомата за степенното множество, няма как да докажем, че $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ е множество.

Формално, ще покажем, че за всеки две множества A и B съществува единствено множество C, за което:

$$\mathrm{u} \in \mathrm{C} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{x})(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \ \&\ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \&\ \mathrm{y} \in \mathrm{B}].$$

За целта, да разгледаме произволен негов елемент u. Тогава $\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \{\{\mathrm{x}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}\}$ за някои $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$. Следователно, $\{\mathrm{x}\} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ и $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Така $\{\mathrm{x}\} \in \mathcal{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ и $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} \in \mathcal{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$, откъдето $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))$.

Оттук не е трудно да се види, че множеството

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{u} \ \mid\ \mathrm{u} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})) \ \&\ (\exists\, \mathrm{x})(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \ \&\ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \&\ \mathrm{y} \in \mathrm{B}]\},$$

съдържа точно наредените двойки с първа компонента от A и втора – от B. Единствеността на множество с такова свойство, следва непосредствено от аксиомата за обемност.

Определение 2А.1. *Нека A и B са множества. Декартово произведение на A с B ще наричаме множеството*

$$A \times B = \{u \ \mid\ (\exists\, x)(\exists\, y)[u = \langle x, y \rangle \ \&\ x \in A \ \&\ y \in B]\}.$$

Следващото твърдение, което ще оставим без доказателство, обхваща основните свойства на декартовото произведение.

Твърдение 2А.2. *В сила са:*

(1) $(\forall\, A)[A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing]$;
(2) $(\exists\, A)(\exists\, B)[A \times B \neq B \times A]$;
(3) $(\exists\, A)(\exists\, B)(\exists\, C)[(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)]$;

(4) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)[A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)]$;
(5) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)[A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)]$;
(6) $(\forall A)(\forall B)[B \times (\cup A) = \cup\{B \times x \mid x \in A\}]$;
(7) $(\forall A)(\forall B)[B \times (\cap A) = \cap\{B \times x \mid x \in A\}]$;

Доказателство. (5) Нека A, B и C са произволни множества. Ще докажем последователно включванията:

($\subseteq$) Нека $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ е произволно. Нека $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{b} \in \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ са такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$. От $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ получаваме, че $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Подобно, $\mathrm{b} \in \mathrm{C}$ ни дава, че $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times \mathrm{C}$. Така $\mathrm{u} \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \times \mathrm{C})$.

($\supseteq$) Нека сега $\mathrm{u} \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \times \mathrm{C})$. Следователно, $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ и $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times \mathrm{C}$. Нека $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ са такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$; нека също $\mathrm{a}' \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$ са такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{a}', \mathrm{c} \rangle$. Тогава $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle = \mathrm{u} = \langle \mathrm{a}', \mathrm{c} \rangle$, откъдето $\mathrm{a} = \mathrm{a}' \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{b} = \mathrm{c} \in \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$. Окончателно, $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$.

(6) Първо ще покажем, че съвкупността $\{\mathrm{B} \times \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$ е множество. наистина, за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ имаме, че $\mathrm{x} \subseteq \cup \mathrm{A}$ и, следователно за всяко такова x, $\mathrm{B} \times \mathrm{x} \subseteq \mathrm{B} \times \cup \mathrm{A}$. Тогава:

$$\{\mathrm{B} \times \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\} = \{\mathrm{u} \mid \mathrm{u} \in \mathcal{P}(\mathrm{B} \times \cup \mathrm{A}) \ \& \ (\exists \mathrm{x} \in \mathrm{A})[\mathrm{u} = \mathrm{B} \times \mathrm{x}]\},$$

което е множество по аксиомната схема за отделянето.

Нека сега B и A са произволни. Нека първо $\mathrm{u} \in \mathrm{B} \times \cup \mathrm{A}$. Нека $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ и $\mathrm{a} \in \cup \mathrm{A}$ са такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{b}, \mathrm{a} \rangle$. Нека x е свидетел за това, че $\mathrm{a} \in \cup \mathrm{A}$: т.е. $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{a} \in \mathrm{x}$. Но тогава $\mathrm{u} \in \mathrm{B} \times \mathrm{x}$ и, следователно, $\mathrm{u} \in \cup\{\mathrm{B} \times \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$.

Накрая, нека $\mathrm{u} \in \cup\{\mathrm{B} \times \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$ и x е свидетел за това, т.е. $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{u} \in \mathrm{B} \times \mathrm{x}$. Понеже $\mathrm{x} \subseteq \cup \mathrm{A}$, то $\mathrm{u} \in \mathrm{B} \times \cup \mathrm{A}$. $\dashv$

Упражнение 2А.3. *Докажете горното твърдение.*

2Б. Релации

Определение 2Б.1. *Казваме, че множеството A е бинарна релация, ако всеки негов елемент е наредена двойка,*

$$Rel(A) \leftrightharpoons (\forall x)[x \in A \to OrdPr(x)].$$

Нека A е бинарна релация. *Дефиниционна област* на A наричаме множеството от онези x, такива че за някое y, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}$:

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{A}) \leftrightharpoons \{\mathrm{x} \mid (\exists \mathrm{y})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}]\} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \cup\cup \mathrm{A} \ \& \ (\exists \mathrm{y})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}]\}.$$

Област от стойностите на релацията A наричаме множеството

$$\mathrm{Rng}(\mathrm{A}) \leftrightharpoons \{\mathrm{y} \mid (\exists \mathrm{x})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}]\} = \{\mathrm{y} \mid \mathrm{y} \in \cup\cup \mathrm{A} \ \& \ (\exists \mathrm{x})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}]\}.$$

Твърдение 2Б.2. *Нека A е бинарна релация. Тогава*

$$A \subseteq Dom(A) \times Rng(A).$$

Доказателство. Нека $\mathrm{u} \in \mathrm{A}$. Тогава $\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ където $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{A})$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{Rng}(\mathrm{A})$. Следователно $\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{Dom}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Rng}(\mathrm{A})$. ⊣

Поле на релацията A наричаме обединението на дефиниционната област и областта от стойностите на A,

$$\mathrm{fld}(\mathrm{A}) \leftrightharpoons \mathrm{Dom}(\mathrm{A}) \cup \mathrm{Rng}(\mathrm{A}).$$

Ако A_1 и A_2 са бинарни релации, то такива ще бъдат и множествата $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2$ и $\mathrm{A}_1 \setminus \mathrm{A}_2$, понеже елементите им са наредени двойки. Поради същата причина $\varnothing$ също е бинарна релация. По-нататък ще я наричаме *никъде недефинирана* релация. Ако C е множество, то декартовият му квадрат $\mathrm{C} \times \mathrm{C}$ отново е бинарна релация. Ще се обръщаме към нея като *пълна релация в* C. *Идентитет* на множеството C ще наричаме множеството $\mathrm{id}_\mathrm{C} \leftrightharpoons \{\mathrm{y} \mid (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{C} \;\&\; \mathrm{y} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle]\}$. Отново не е трудно да се съобрази, че id_C е бинарна релация.

2Б.1. Обръщане. Нека A е бинарна релация. Дефинираме множеството A^{-1} като

$$\mathrm{A}^{-1} \leftrightharpoons \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \mid \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{A}\}.$$

Понеже всички елементи на A^{-1} са наредени двойки, то A^{-1} също е бинарна релация. По-нататък ще наричаме A^{-1} *обратна* на A.

Непосредствено от определението на обратната релация следва, че ако A и B са бинарни релации, то:

- $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$;
- $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cup \mathrm{B}^{-1}$;
- $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cap \mathrm{B}^{-1}$;
- $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \setminus \mathrm{B}^{-1}$;
- $\mathrm{Dom}(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{Rng}(\mathrm{A})$;
- $\mathrm{Rng}(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{A})$.

2Б.2. Композиция. Нека A_1 и A_2 са бинарни релации. *Композиция* на A_1 и A_2 ще наричаме множеството:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 \circ \mathrm{A}_2 \leftrightharpoons \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \mid (\exists\, \mathrm{z})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{A}_1 \;\&\; \langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}_2]\} = \\ = \{\mathrm{u} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{A}_1) \times \mathrm{Rng}(\mathrm{A}_2) \;\& \\ \& \; (\exists\, \mathrm{x})(\exists\, \mathrm{y})(\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \;\&\; \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{A}_1 \;\&\; \langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A}_2]\}. \end{aligned}$$

От дефиницията е ясно, че $\mathrm{A}_1 \circ \mathrm{A}_2$ също е бинарна релация. Следващото твърдение обхваща основни свойства на операцията композиция.

Твърдение 2Б.3. *В сила са следните:*

(1) *(некомутативност)* $(\exists\, A_1)(\exists\, A_2)[\mathit{Rel}(A_1)\ \&\ \mathit{Rel}(A_2)\ \&\ A_1 \circ A_2 \neq A_2 \circ A_1]$*;*
(2) *(асоциативност)* $(\forall\, A_1)(\forall\, A_2)(\forall\, A_3)[(A_1 \circ A_2) \circ A_3 = A_1 \circ (A_2 \circ A_3)]$*;*
(3) *(дистрибутивност)* $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[A \circ (B_1 \cup B_2) = (A \circ B_1) \cup (A \circ B_2)]$*;*
(4) *(дистрибутивност)* $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[(B_1 \cup B_2) \circ A = (B_1 \circ A) \cup (B_2 \circ A)]$*;*
(5) $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[A \circ (B_1 \cap B_2) \subseteq (A \circ B_1) \cap (A \circ B_2)]$*;*
(6) $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[(B_1 \cap B_2) \circ A \subseteq (B_1 \circ A) \cap (B_2 \circ A)]$*;*
(7) $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[A \circ (B_1 \setminus B_2) \supseteq (A \circ B_1) \setminus (A \circ B_2)]$*;*
(8) $(\forall\, A)(\forall\, B_1)(\forall\, B_2)[(B_1 \setminus B_2) \circ A \supseteq (B_1 \circ A) \setminus (B_2 \circ A)]$*;*
(9) $(\forall\, A_1)(\forall\, A_2)[(A_1 \circ A_2)^{-1} = A_2^{-1} \circ A_1^{-1}]$.

като включванията в (5),(6),(7) и (8) не винаги могат да бъдат обърнати.

Доказателство. (5) Нека $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \circ (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2)$. Тогава съществуват x, y и z такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{A}$ и $\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$. Следователно за всяко $i \in \{1, 2\}$, $\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{B}_i$ и така $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{A} \circ \mathrm{B}_i$. Окончателно, $\mathrm{u} \in (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_1) \cap (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_2)$.

За да покажем, че обратното включване не винаги е в сила, да разгледаме релациите $\mathrm{A} = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle, \langle \mathrm{x}, \mathrm{t} \rangle\}$, $\mathrm{B}_1 = \{\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle\}$ и $\mathrm{B}_2 = \{\langle \mathrm{t}, \mathrm{y} \rangle\}$, където $\mathrm{z} \neq \mathrm{t}$. Тогава имаме, че $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 = \varnothing$, откъдето $\mathrm{A} \circ \varnothing = \varnothing$. Но $(\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_1) \cap (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_2) = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle\} \cap \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle\} = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle\} \not\subseteq \varnothing$.

(7) Нека $\mathrm{u} \in (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_1) \setminus (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_2)$. Тогава съществуват x, y и z такива, че $\mathrm{u} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{A}$ и $\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{B}_1$. Освен това за всяко t, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{t} \rangle \in \mathrm{A}$ влече, че $\langle \mathrm{t}, \mathrm{y} \rangle \notin \mathrm{B}_2$. В частност, $\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_2$. Следователно, $\mathrm{u} \in \mathrm{A} \circ (\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_2)$.

За да покажем, че обратното включване не винаги е в сила, отново да разгледаме релациите A, B_1 и B_2 от (5). Тогава

$$\mathrm{A} \circ (\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_2) = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle\} \not\subseteq \varnothing = (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_1) \setminus (\mathrm{A} \circ \mathrm{B}_2).$$

$\dashv$

2Б.3. Образ и праобраз. Нека R е бинарна релация и $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{R})$. *Образ* на A при R ще наричаме множеството:

$$\mathrm{R}[\mathrm{A}] = \{\mathrm{y} \ \mid\ (\exists\, \mathrm{x} \in \mathrm{A})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R}]\}.$$

Забележете, че $\mathrm{R}[\mathrm{A}]$ наистина е множество, понеже условието за принадлежност към него е удовлетворено само от елементи на множеството $\mathrm{Rng}(\mathrm{R})$. Единствеността пък следва от аксиомата за обемност.

Нека $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{Rng}(\mathrm{R})$. *Праобраз* на B при R ще наричаме множеството:

$$\mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}] = \{\mathrm{x} \ \mid \ (\exists\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}]\}.$$

Отново, $\mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}]$ е множество, понеже условието за принадлежност към него е удовлетворено само от елементи на множеството $\mathrm{Dom}(\mathrm{R})$. За да покажем единствеността пак използваме аксиомата за обемност.

При така въведение означение възниква въпросът дали не сме претоварили използването на $\mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}]$? Дали това е образът на B при R^{-1} или праобразът на B при R? Оказва се, че и двете означават едно и също множество.

Твърдение 2Б.4. *Нека R е бинарна релация и $B \subseteq Rng(R)$. Тогава*

$$(R^{-1})[B] = R^{-1}[B].$$

Доказателство. Нека $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{Rng}(\mathrm{R})$ и x е произволно. Тогава:

$$\mathrm{x} \in (\mathrm{R}^{-1})[\mathrm{B}] \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})[\langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{R}^{-1}] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}] \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}].$$

⊣

Лесно е да бъдат проверени следните свойства на образите и праобразите:

- $\mathrm{R}[\varnothing] = \mathrm{R}^{-1}[\varnothing] = \varnothing$;
- ако $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{R})$, то $\mathrm{R}[\mathrm{A}] \subseteq \mathrm{R}[\mathrm{A}_1]$;
- ако $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}_1 \subseteq \mathrm{Rng}(\mathrm{R})$, то $\mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}] \subseteq \mathrm{R}^{-1}[\mathrm{B}_1]$.

Твърдение 2Б.5. *Нека R е бинарна релация и X е множество, за което $(\forall\, x \in X)[x \subseteq Dom(R)]$. Тогава:*

$$R[\cup X] = \cup\{R[x] \ \mid \ x \in X\}.$$

Доказателство. Да забележим, че за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$, $\mathrm{x} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{R})$, откъдето $\mathrm{R}[\mathrm{x}] \subseteq \mathrm{R}[\mathrm{Dom}(\mathrm{R})] = \mathrm{Rng}(\mathrm{R})$. Тогава $\{\mathrm{R}[\mathrm{x}] \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$ е множество, понеже всички негови елементи са от $\mathcal{P}(\mathrm{Rng}(\mathrm{R}))$ и могат да бъдат определени с формула от първи ред в езика на теория на множествата. Освен това $\cup\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{R})$.

Нека $\mathrm{b} \in \mathrm{R}[\cup\mathrm{X}]$. Нека a е свидетел за това, т.е $\mathrm{a} \in \cup\mathrm{X}$ и $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathrm{R}$. Нека $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ е такова, че $\mathrm{a} \in \mathrm{x}_0$. Но тогава a е свидетел за това, че $\mathrm{b} \in \mathrm{R}[\mathrm{x}_0]$. Оттук $\mathrm{b} \in \cup\{\mathrm{R}[\mathrm{x}] \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$.

Нека обратно $b \in \cup\{R[x] \mid x \in X\}$. Нека $x_0 \in X$ е свидетел за това, т.е. $b \in R[x_0]$. Но $x_0 \subseteq \cup X$, откъдето $b \in R[\cup X]$. $\dashv$

Твърдение 2Б.6. *Нека R е бинарна релация и X е множество, за което $(\forall\, x \in X)[x \subseteq Dom(R)]$. Тогава:*

$$R[\cap X] \subseteq \cap\{R[x] \mid x \in X\},$$

като включването не винаги може да се обърне. Ако допълнително е в сила, че:

$$(\forall\, y \in Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))[\langle x, y\rangle \in R],$$

то

$$R[\cap X] = \cap\{R[x] \mid x \in X\}.$$

Доказателство. Отново както в предишното твърдение може да се съобрази, че съвкупността $\{R[x] \mid x \in X\}$ е множество. Освен това, за всяко $x \in X$, $\cap X \subseteq x$, откъдето $\cap X \subseteq Dom(R)$.

Нека $b \in R[\cap X]$. Понеже за всяко $x \in X$, $\cap X \subseteq x$, то $b \in R[x]$. Следователно $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.

За да покажем, че обратното включване не винаги е в сила, да разгледаме $X = \{\{a_1\}, \{a_2\}\}$ и релацията $R = \{\langle a_1, b\rangle, \langle a_2, b\rangle\}$. Тогава $\{R[x] \mid x \in X\} = \{\{b\}\}$, откъдето $\cap\{R[x] \mid x \in X\} = \cap\{\{b\}\} = \{b\}$. От друга страна, обаче, $\cap X = \varnothing$, откъдето $R[\cap X] = \varnothing$.

Накрая, да предположим, че релацията R е такава, че

$$(\forall\, y \in Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))[\langle x, y\rangle \in R].$$

Ще покажем, че $\cap\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq R[\cap X]$. Наистина, ако $X = \varnothing$, то включването е изпълнено. Занапред нека X е непразно. Нека сега $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$ е произволно. Тогава за всяко $x \in X$, $b \in R[x]$. Следователно,

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, a \in x)[\langle a, b\rangle \in R].$$

Нека x_0 е елемент на X, а $a_0 \in x_0$ е такова, че $\langle a_0, b\rangle \in R$. Нека $x \in X$ е произволно и $a \in x$ е такова, че $\langle a, b\rangle \in R$. Тогава $a = a_0$, откъдето $a_0 \in x$. Понеже x беше произволно, то $a_0 \in \cap X$. Така $b \in R[\cap X]$. $\dashv$

2В. Функции

Нека R е бинарна релация. Казваме, че R е *функция*, ако удовлетворява:

$$\mathrm{Funct}(R) \leftrightharpoons \mathrm{Rel}(R) \;\&\; (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, y')[\langle x, y\rangle \in R \;\&\; \langle x, y'\rangle \in R \to y = y'].$$

Понеже всяка функция е бинарна релация, то понятията за дефиниционна област и област от стойностите се пренасят директно върху функции. Ще въведем следните уговорки:

Ако $\mathrm{Dom}(\mathrm{R}) = A$ и $\mathrm{Rng}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{B}$, то казваме, че R е функция от A към B и ще означаваме това с $\mathrm{R} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Ако $\mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \subseteq A$ и $\mathrm{Rng}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{B}$, то казваме, че R е *частична функция* от A към B и ще означаваме това с $\mathrm{R} : \mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B}$.

Когато $\mathrm{R} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} = \mathrm{Rng}(\mathrm{R})$ казваме, че R е *сюрекция* (епиморфизъм), $\mathrm{R} : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$.

Когато пък $\mathrm{R} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ и

$$(\forall \mathrm{x})(\forall \mathrm{x}')(\forall \mathrm{y})[\mathrm{x} \neq \mathrm{x}' \ \&\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R} \to \langle \mathrm{x}', \mathrm{y}\rangle \notin \mathrm{R}],$$

то казваме, че R е *инекция* (мономорфизъм), $\mathrm{R} : \mathrm{A} \rightarrowtail \mathrm{B}$.

Биекция (взаимно еднозначно съответствие) между A и B ще наричаме функция от A към B, която е едновременно сюрекция и инекция.

Понеже всяка функция е и бинарна релация отново директно можем да пренасем понятията за образ и праобраз на множество. Нека $\mathrm{R} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ и $\mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{A}$. По-специално, *образът* при функцията R на A_1 е множеството:

$$\mathrm{R}[\mathrm{A}_1] \leftrightharpoons \{\mathrm{y} \mid (\exists \mathrm{x} \in \mathrm{A}_1)[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}]\}.$$

Рестрикция на R над A_1 наричаме функцията

$$\mathrm{R} \upharpoonright \mathrm{A}_1 \leftrightharpoons \mathrm{R} \cap (\mathrm{A}_1 \times \mathrm{Rng}(\mathrm{R})).$$

Забележете, че ако $\mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{A}_2 \subseteq \mathrm{A}$, то $\mathrm{R}[\mathrm{A}_1] \subseteq \mathrm{R}[\mathrm{A}_2]$ и $\mathrm{R} \upharpoonright \mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{R} \upharpoonright \mathrm{A}_2$. Занапред, когато f е функция и $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{f}$ ще използваме обичайното означение $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$.

Използвайки определението за композиция на релации имаме, че композицията $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ на функциите f и g е бинарна релация. Оказва се, че тя е и функция.

Твърдение 2В.1. *Нека f и g са функции. Тогава $f \circ g$ е функция, чиято дефиниционна област е:*

$$Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in Dom(f) \ \&\ f(x) \in Dom(g)\}.$$

Освен това за всяко $x \in Dom(f \circ g)$, е в сила, че $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

Доказателство. Нека $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}_1\rangle, \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}_2\rangle \in \mathrm{f} \circ \mathrm{g}$. Нека z_1 и z_2 са такива, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_1\rangle, \langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_2\rangle \in \mathrm{f}$ и $\langle \mathrm{z}_1, \mathrm{y}_1\rangle, \langle \mathrm{z}_2, \mathrm{y}_2\rangle \in \mathrm{g}$. Понеже f е функция, то $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$. Оттук и от това, че g е функция, получаваме, че $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$. Следователно $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ е функция.

Нека $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})$. Нека y и z са такива, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{f}$ и $\langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{g}$. Тогава $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f})$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{z} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{g})$.

Обратно, нека x е такова, че $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f})$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{g})$. Тогава $\langle \mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}) \rangle \in \mathrm{f}$ и $\langle \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) \rangle \in \mathrm{g}$. Следователно, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) \rangle \in \mathrm{f} \circ \mathrm{g}$. Оттук $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})$ и $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$. $\dashv$

Понеже всяка функция е релация, то операцията обръщане на функция е добре дефинирана. Оказва се обаче, че в общия случай обратната релация на функция не винаги е функция. Случаят, когато това е така, се описва от следващото твърдение.

Твърдение 2В.2. *Нека f е функция. Тогава $Funct(f^{-1}) \Leftrightarrow f$ е инекция.*

Доказателство. Нека f^{-1} е функция и да предположим, че f не е инекция. Нека тогава $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ са такива, че $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$. Тогава $\langle \mathrm{x}_1, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{f}$ и $\langle \mathrm{x}_2, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{f}$. Следователно, $\langle \mathrm{y}, \mathrm{x}_1 \rangle \in \mathrm{f}^{-1}$ и $\langle \mathrm{y}, \mathrm{x}_2 \rangle \in \mathrm{f}^{-1}$, което противоречи с това, че f^{-1} е функция.

Обратно, нека f е инекция. Нека x, y_1 и y_2 са такива, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}_1 \rangle \in \mathrm{f}^{-1}$ и $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}_2 \rangle \in \mathrm{f}^{-1}$. Следователно, $\langle \mathrm{y}_1, \mathrm{x} \rangle, \langle \mathrm{y}_2, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{f}$. Тогава $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$, откъдето $\mathrm{Funct}(\mathrm{f}^{-1})$. $\dashv$

Директно следствие от Твърденията 2Б.5 и 2Б.6 е следното.

Твърдение 2В.3. *Нека f е функция и X и Y са такива множества, че $(\forall\, x \in X)[x \subseteq Dom(f)]$ и $(\forall\, y \in Y)[y \subseteq Rng(f)]$. Тогава:*

- $f[\cup X] = \cup\{f[x] \mid x \in X\}$;
- $f[\cap X] \subseteq \cap\{f[x] \mid x \in X\}$ *като включването не винаги може да се обърне;*
- $f^{-1}[\cup Y] = \cup\{f^{-1}[y] \mid y \in Y\}$;
- $f^{-1}[\cap Y] = \cap\{f^{-1}[y] \mid y \in Y\}$.

Определение 2В.4. *Казваме, че функциите f и g са съвместими, ако релацията $f \cup g$ е функция.*

Следващото твърдение показва, че две функции са съвмстими, точно тогава, когато съвпадат върху сечението на дефиниционните си области.

Твърдение 2В.5. *f и g са съвместими точно тогава, когато*

$$f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)).$$

Доказателство. $(\rightarrow)$ Нека f и g са съвместими. Нека $\mathrm{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{g})$. Тогава $\langle \mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{a}) \rangle \in \mathrm{f}$ и $\langle \mathrm{a}, \mathrm{g}(\mathrm{a}) \rangle \in \mathrm{g}$. Следователно,

$$\langle \mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{a}) \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{g}(\mathrm{a}) \rangle \in \mathrm{f} \cup \mathrm{g}.$$

Понеже $\mathrm{f} \cup \mathrm{g}$ е функция, то $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \mathrm{g}(\mathrm{a})$.

($\leftarrow$) Нека за всяко $\mathrm{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{g})$, $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \mathrm{g}(\mathrm{a})$. Нека $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$ и $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle$ са елементи на $\mathrm{f} \cup \mathrm{g}$. Възможни са следните три случая:

- $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \mathrm{f}$. Тогава, понеже f е функция, то $\mathrm{b} = \mathrm{b}'$;
- $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \mathrm{g}$. Тогава, понеже g е функция, то $\mathrm{b} = \mathrm{b}'$;
- $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle \in \mathrm{f}$, $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \mathrm{g}$. Но $\mathrm{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{g})$ и, следователно, $\mathrm{b} = \mathrm{f}(\mathrm{a}) = \mathrm{g}(\mathrm{a}) = \mathrm{b}'$;

Така $\mathrm{Funct}(\mathrm{f} \cup \mathrm{g})$. ⊣

Упражнение 2В.6. *Нека F е множество от функции, всеки две от които са съвместими. Тогава $\cup F$ е функция, като при това*

$$Dom(\cup F) = \cup \{ Dom(f) \ \mid \ f \in F \},$$

$$Rng(\cup F) = \cup \{ Rng(f) \ \mid \ f \in F \}.$$

2В.1. Лема на Тарски. Нека A е фиксирано множество. Казваме, че функцията $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е *монотонна*, ако

$$(\forall X_1)(\forall X_2)[X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2)].$$

Нека $f : X \to Y$. Казваме, че $a \in X$ е *неподвижна точка* за f, ако $f(a) = a$.

Оказва се, че всяка монотонна функция има неподвижна точка.

Теорема 2В.7 (Tarski)**.** *Нека $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция. Тогава f има неподвижна точка. Нещо повече, съществуват неподвижни точки X_0 и X_1 за f, които са съответно най-малкта и най-голямата с това свойство, т.е.*

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A))[f(X) = X \to X_0 \subseteq X \subseteq X_1].$$

Доказателство. Нека $\Pi = \{X \ \mid \ X \in \mathcal{P}(A) \ \& \ f(X) \subseteq X\}$. Ясно е, че $A \in \Pi$. Нека $X_0 = \cap \Pi$. В частност, $X_0 \subseteq A$. Нека $X \in \Pi$. Тогава $X_0 \subseteq X$ и от монотоността на f получаваме, че $f(X_0) \subseteq f(X) \subseteq X$. Следователно $f(X_0) \subseteq \cap \Pi = X_0$ и така $X_0 \in \Pi$.

Пак от монотоността на f имаме, че $f(f(X_0)) \subseteq f(X_0)$, откъдето $f(X_0) \in \Pi$. Следователно, $X_0 \subseteq f(X_0)$. Така получаваме, че $f(X_0) = X_0$. Оттук не е трудно да се съобрази, че X_0 е най-малката неподвижна точка за f.

Нека $\Sigma = \{X \ \mid \ X \in \mathcal{P}(A) \ \& \ X \subseteq f(X)\}$. Ясно е, че $\varnothing \in \Sigma$. Нека $X_1 = \cup \Sigma$. Нека $X \in \Sigma$. Тогава $X \subseteq X_1$ откъдето, $X \subseteq f(X) \subseteq f(X_1)$. Следователно, $X_1 = \cup \Sigma \subseteq f(X_1)$ и така $X_1 \in \Sigma$.

Понеже f е монотонна, то $f(X_1) \subseteq f(f(X_1))$. Тогава $f(X_1) \in \Sigma$, откъдето $f(X_1) \subseteq X_1$. Следователно, $f(X_1) = X_1$. Оттук не е трудно да се съобрази, че X_1 е най-голямата неподвижна точка за f. $\dashv$

2Г. Релации на еквивалентност

Казваме, че бинарната релация R е:

в A, ако $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$;

рефлексивна в A, ако $(\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \to \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{R}]$;

иррефлексивна, ако $(\forall\, \mathrm{x})\neg(\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{R})$;

симетрична, ако $(\forall\, \mathrm{x})(\forall\, \mathrm{y})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R} \to \langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{R}]$;

антисиметрична, ако $(\forall\, \mathrm{x})(\forall\, \mathrm{y})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}\ \&\ \langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{R} \to \mathrm{x} = \mathrm{y}]$;

асиметрична, ако $(\forall\, \mathrm{x})(\forall\, \mathrm{y})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}\ \to \langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle \notin \mathrm{R}]$;

транзитивна, ако $(\forall\, \mathrm{x})(\forall\, \mathrm{y})(\forall\, \mathrm{z})[\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \in \mathrm{R}\ \&\ \langle \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle \in \mathrm{R} \to \langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle \in \mathrm{R}]$;

релация на еквивалентност в A, ако R е в A, R е рефлексивна в A, симетрична и транзитивна;

частична наредба, ако R е в A, R е рефлексивна в A, антисиметрична и транзитивна;

строга частична наредба, ако R е в A, асиметрична и транзитивна.

Нека R е релация на еквивалентност в A. За всяко $a \in A$ дефинираме множеството $[a]_R$ като съвкупността на всички елементи на A, които са R-еквивалентни на a:

$$[a]_R = \{b \ \mid\ b \in A\ \&\ \langle a, b\rangle \in R\}.$$

Ясно е, че $[a]_R = \{b \ \mid\ b \in A\ \&\ \langle b, a\rangle \in R\}$. Множеството $[a]_R$ ще наричаме *клас на еквивалентност* на елемента a по релацията R. Ако $a \in A$, то $[a]_R \neq \varnothing$, защото поради рефлексивността на R, $a \in [a]_R$. Съвкупността A/R на всички класове на еквивалентост по R ще наричаме *фактор-множество* на A по R:

$$A/R = \{[a_R] \ \mid\ a \in A]\}.$$

Лема 2Г.1. *Нека R е релация на еквивалентност в A и $a, b \in A$. Тогава:*

- $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$;
- $\langle a, b\rangle \notin R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.

Доказателство.

- Нека $\langle a, b\rangle \in R$ и $x \in [a]_R$. Тогава $\langle x, a\rangle \in R$. Поради транзитивността на R имаме, че $\langle x, b\rangle \in R$. Следователно, $x \in [b]_R$.

Така $[a]_R \subseteq [b]_R$. Обратното включване се доказва аналогично.

Нека сега $[a]_R = [b]_R$. Поради рефлексивността на R имаме, че $a \in [a]_R$. Следователно, $a \in [b]_R$, откъдето $\langle a, b\rangle \in R$.

- Нека $\langle a, b\rangle \notin R$ и да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$. Нека тогава $x \in [a]_R \cap [b]_R$. Следователно, $\langle x, a\rangle, \langle x, b\rangle \in R$. Сега от симетричността и транзитивността на R получаваме, че $\langle a, b\rangle \in R$. Противоречие.

  Нека $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ и да допуснем, че $\langle a, b\rangle \in R$. Но $a \in [a]_R$ и, следователно, $a \in [b]_R$. Тогава, обаче, $[a]_R \cap [b]_R$ няма да е празно, понеже съдържа a. Противоречие.

$\dashv$

Множеството A/R представлява съвкупност от непразни непресичащи се помежду си множества, чието обединение е самото A. Такъв тип множества ще наричаме *разбиване* на A.

Определение 2Г.2. *Казваме, че множеството $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ от подмножества на A е разбиване на A, ако:*

- *елементите на S са непразни: $(\forall\, x)[x \in S \to x \neq \varnothing]$;*
- *елементите на S са взаимно непресичащи се:*

$$(\forall\, x \in S)(\forall\, y \in S)[x \neq y \to x \cap y = \varnothing];$$

- *обединението на S е цялото A: $\cup S = A$.*

Така, всяка релация на еквивалентност над непразно множество поражда разбиване на това множество, именно фактор-множеството по тази релация. Оказва се, че е вярно и обратното. По-точно, ако S е разбиване на A, то релацията E_S, определена чрез:

$$E_S = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \;\mid\; (\exists\, C \in S)[a \in C \;\&\; b \in C]\}$$

е релация на еквивалентност над A. Следващата теорема установява връзката между релациите $E_{A/R}$ и R и разбиванията S и A/E_S.

Теорема 2Г.3. *Нека R е релация на еквивалентност над A и S е разбиване на A. Тогава: $E_{A/R} = R$ и $S = A/E_S$.*

Упражнение 2Г.4. *Докажете горната теорема.*

Упражнение 2Г.5. *Нека R е релация над A. Докажете, че:*

- *R е рефлексивна над $A \Leftrightarrow id_A \subseteq R$;*
- *R е симетрична $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;*
- *R е антисиметрична $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$;*
- *R е асиметрична $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$;*

- *R е транзитивна $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.*

2Д. Частично наредени множества

Нека A е множество. Да припомним, че R е *частична наредба в* A, ако R е в A, R е рефлексивна в A, антисиметрична и транзитивна. Ще казваме също, че $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ е *частично наредено множество* (ч.н.м.), ако R е частична наредба в A.

Не е трудно да се забележи, че винаги $\mathrm{id_A}$ е частична наредба в A. Следователно,

$$(\forall\, \mathrm{A})(\exists\, \mathrm{R})[\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle - \text{ ч.н.м.}]$$

Ако $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A}$ и R е частична наредба в A, ще казваме, че x и y са R-*сравними* ($Comp_{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$), ако:

$$Comp_{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightharpoons \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R} \vee \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{R}.$$

Ако всеки два елемента на A са R-сравними, то R ще наричаме линейна наредба, а $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ – линейно наредено множество (л.н.м.):

$$(\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{A})(\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{A})[Comp_{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})].$$

Ако $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ е ч.н.м. и $\mathrm{A_1} \subseteq \mathrm{A}$, то $\langle \mathrm{A_1}, \mathrm{R} \cap (\mathrm{A_1} \times \mathrm{A_1}) \rangle$ също е ч.н.м. Наредбата в $\mathrm{A_1}$ ще наричаме *индуцирана*.

Да припомним също, че R е *строга частична наредба* в A, ако R в A и асиметрична и транзитивна. В този случай казваме, че $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ е *строго частично наредено множество* (с.ч.н.м.). Понякога към определението на строга часична наредба се добавя и условието за иррефлексивност, обаче това е ненужно, понеже е то е следствие от асиметричността.

Твърдение 2Д.1. *Нека R е асиметрична релация. Тогава R е и иррефлексивна.*

Доказателство. Ако $\mathrm{R} = \varnothing$, то твърдението следва непосредствено. Нека сега $\mathrm{R} \neq \varnothing$. Да допуснем, че R не е иррефлексивна и нека x е свидетел за това. Следователно, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{R}$. Но R е асиметрична, откъдето $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle \notin \mathrm{R}$. Противоречие. Следователно R е иррефлексивна. $\dashv$

Да забележим, че ако R е антисиметрична релация, то $\mathrm{R} \setminus \mathrm{fld}(\mathrm{R})$ е асиметрична. Използвайки това наблюдение, следващото твърдение прави връзка между строгите частични наредби и частичните наредби.

Твърдение 2Д.2. *Ако R е частична наредба в A, то $R \setminus id_A$ е строга частична наредба в A; Ако R е строга частична наредба в A, то $R \cup id_A$ е частична наредба в A.*

Доказателство. Нека първо R е частична наредба в A. От антисиметричността и имаме, че $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} \subseteq \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Тогава $(\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_{tA}) \cap (\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}) \cap (\mathrm{R}^{-1} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}^{-1}) = (R \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}) \cap (\mathrm{R}^{-1} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}) = (\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1}) \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A} \subseteq \mathrm{id}_\mathrm{A} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A} = \varnothing$. Следователно $\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е асиметрична. За да покажем и, че $\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е транзитивна, да предположим, че x, y и z са такива елементи на A, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$ и $\langle \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Поради транзитивността на R имаме, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{R}$. Да предположим, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Тогава $\mathrm{x} = \mathrm{z}$, откъдето $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$ и $\langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$, което противоречи с асиметричността на $\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Следователно, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Тогава $R \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е транзитивна.

Нека R е строга частична наредба в A. Тогава $\mathrm{id}_\mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$, откъдето $\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е рефлексивна в A. Понеже R е асиметрична имаме, че $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} = \varnothing$. Тогава $(\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \cap (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \cap (\mathrm{R}^{-1} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) = (\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1}) \cup \mathrm{id}_\mathrm{A} = \mathrm{id}_\mathrm{A}$ и, следователно $\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е антисиметрична. Накрая R е транзитивна, т.е. $\mathrm{R} \circ \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}$. Така получаваме, че $(\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \circ (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) = (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \circ \mathrm{R} \cup (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \circ \mathrm{id}_\mathrm{A} = (\mathrm{R} \circ \mathrm{R} \cup \mathrm{R}) \cup (\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) = \mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Така, $\mathrm{R} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$ е транзитивна и, следователно, частична наредба в A. ⊣

Ако $\langle \mathrm{A}, \mathrm{S} \rangle$ е с.ч.н.м., то $\mathrm{S} = (\mathrm{S} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}) \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Тогава, като следствие от предишното твърдение получаваме, че S е строга частична наредба в A точно тогава, когато съществува частична наредба R в A такава, че:

$$\mathrm{S} = \mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}\,.$$

Подобно, ако $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ е ч.н.м., то $\mathrm{R} = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{id}_\mathrm{A}) \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}$. Тогава, като следствие от предишното твърдение получаваме, че R е частична наредба в A точно тогава, когато съществува строга частична наредба S в A такава, че:

$$R = \mathrm{S} \cup \mathrm{id}_\mathrm{A}.$$

Да забележим, че ако R е частична наредба в A, то такава е и обратната и релация R^{-1}, която ще наричаме *обратна* наредба.

Твърдение 2Д.3. *$\langle A, R \rangle$ е (с.)ч.н.м. тогава и само тогава, когато $\langle A, R^{-1} \rangle$ е (с.)ч.н.м.*

Доказателство. Твърдението следва непосредствено от следните еквивалентности:

R е релексивна в A $\Leftrightarrow \mathrm{id}_\mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{id}_\mathrm{A}^{-1} \subseteq \mathrm{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{id}_\mathrm{A} \subseteq \mathrm{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1}$ е рефлексивна в A;

R е симетрична $\Leftrightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1} = (\mathrm{R}^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1}$ е симетрична;

R е антисиметрична $\Leftrightarrow \mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} \subseteq \mathrm{id}_\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1} \cap (\mathrm{R}^{-1})^{-1} \subseteq \mathrm{id}_\mathrm{A} \Leftrightarrow$ R^{-1} е антисиметрична;

R е асиметрична $\Leftrightarrow \mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1} \cap (\mathrm{R}^{-1})^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1}$ е асиметрична;

R е транзитивна $\Leftrightarrow \mathrm{R} \circ \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1} \circ \mathrm{R}^{-1} \subseteq \mathrm{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{R}^{-1}$ е транзитивна. $\dashv$

Определение 2Д.4. *Нека $\langle A, R\rangle$ е ч.н.м., $B \subseteq A$ и $a \in A$. Казваме, че:*

- *a е горна граница за B в $\langle A, R\rangle$, ако $(\forall\, x)[x \in B \to \langle x, a\rangle \in R]$;*
- *a е долна граница за B в $\langle A, R\rangle$, ако a е горна граница за B в $\langle A, R^{-1}\rangle$;*
- *B е ограничено, ако съществува x, което е горна граница за A в $\langle A, R\rangle$;*
- *a е най-голям елемент за B в $\langle A, R\rangle$, ако $a \in B$ и a е горна граница за B в $\langle A, R\rangle$;*
- *a е най-малък елемент за B в $\langle A, R\rangle$, ако $a \in B$ и a е долна граница за B в $\langle A, R\rangle$;*
- *a е точна горна граница за B в $\langle A, R\rangle$, ако a е горна граница за B в $\langle A, R\rangle$ и a е най-малкият елемент в множеството на горните граници за B в $\langle A, R\rangle$, $a = \sup_{\langle A,R\rangle}(B)$;*
- *a е точна долна граница за B в $\langle A, R\rangle$, ако $a = \sup_{\langle A,R^{-1}\rangle}(B)$, $a = \inf_{\langle A,R\rangle}(B)$;*
- *a е максимален елемент за B в $\langle A, R\rangle$, ако $a \in B$ и*

$$\neg(\exists\, x)[\langle a, x\rangle \in T \;\&\; a \neq x];$$

- *a е минимален елемент за B в $\langle A, R\rangle$, ако е максимален елемент за B в $\langle A, R^{-1}\rangle$.*

1. m е точна горна граница за $\varnothing$ в $\langle$A,R$\rangle$ точно тогава, когато m е най-малкият елемент за A в $\langle$A,R$\rangle$;

2. най-големият елемент на B в $\langle$A,R$\rangle$ е точна горна граница за B в $\langle$A,R$\rangle$;

3. За всяко множество A да означим с $\langle \mathrm{A}, \subseteq_\mathrm{A}\rangle$ ч.н.м., в което ч.н. представлява включването $\subseteq$ между множества, ограничено до елементите на A,

$$\mathrm{x} \subseteq_\mathrm{A} \mathrm{y} \leftrightharpoons \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A} \;\&\; \mathrm{x} \subseteq \mathrm{y}.$$

Забележете, че в $\langle \mathcal{P}(\mathrm{A}), \subseteq_{\mathcal{P}(\mathrm{A})} \rangle$ всяко подмножество $\mathrm{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{A})$ има точна горна граница – $\cup\mathrm{B}$. В общия случай на ч.н.м. $\langle \mathrm{A}, \subseteq_{\mathrm{A}} \rangle$ и $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, действително $\cup\mathrm{B}$ ограничава всеки елемент на B (т.е. за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$, имаме $\mathrm{x} \subseteq \cup\mathrm{B}$), но не е задължително елемент на A (т.е. не винаги е вярно, че за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$, $\mathrm{x} \subseteq_{\mathrm{A}} \cup\mathrm{B}$).

Определение 2Д.5. *Нека $\langle A, R \rangle$ е ч.н.м. Верига (линейно наредена част) в $\langle A, R \rangle$ се нарича подмножество $B \subseteq A$ такова, че всеки два негови елемента са R сравними.*

С други думи $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ е верига, ако $\langle \mathrm{B}, \mathrm{R} \cap (\mathrm{B} \times \mathrm{B}) \rangle$ е линейно наредено. Забележете, че $\varnothing$ е верига във всяко ч.н.м.

1. Нека $(\mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B}) = \{\mathrm{f} \mid \mathrm{f} : \mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B}\}$ е множеството на всички частични функции от A към B и $\mathcal{A}$ е ч.н.м. $\langle (\mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B}), \subseteq_{(\mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B})} \rangle$. Нека Λ е верига в $\mathcal{A}$. В частност Λ е множество от съвместими функции и, следователно, $\cup\Lambda$ е функция. Освен това

$$\mathrm{Dom}(\cup\Lambda) = \cup\{\mathrm{Dom}(f) \mid f \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{A}$$

и

$$\mathrm{Rng}(\cup\Lambda) = \cup\{\mathrm{Rng}(f) \mid f \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{B}.$$

Следователно $\cup\Lambda \in (\mathrm{A} \nrightarrow \mathrm{B})$. Оттук следва, че $\cup\Lambda$ е точна горна граница за Λ в $\mathcal{A}$.

Забележете, че в множеството ${}^{\mathrm{A}}\mathrm{B} = (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) = \{\mathrm{f} \mid \mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}\}$ всички непразни вериги (по отношение на $\subseteq_{\mathrm{A} \to \mathrm{B}}$) задължително са синглетони.

2. Нека $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$ е ч.н.м. Нека $\mathcal{A} = \{\mathrm{B} \mid \mathrm{B}$ е верига в $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle\}$. Тогава всяка верига в $\langle \mathcal{A}, \subseteq_{\mathcal{A}} \rangle$ има точна горна граница. Наистина, нека $\Lambda \subseteq \mathcal{A}$ е една такава верига. Да забележим, че $(\forall\,\mathrm{B})[\mathrm{B} \in \Lambda \to \mathrm{B} \subseteq \cup\Lambda]$ и, че $\cup\Lambda$ е подмножество на всяко множество X, което ограничава всички елементи на Λ. Следователно, за да покажем че $\cup\Lambda$ е точна горна граница за Λ в $\langle \mathcal{A}, \subseteq_{\mathcal{A}} \rangle$ е достатъчно да покажем, че $\cup\Lambda \in \mathcal{A}$.

Понеже всеки елемент на Λ е верига в $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$. в частност подмножество на а, то $\cup\Lambda \subseteq \mathrm{A}$. Остава да проверим, че $\cup\Lambda$ също е верига в $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$.

За целта нека $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1 \in \cup\Lambda$. Тогава нека $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1 \in \Lambda$ са такива, че $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{B}_0$ и $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{B}_1$. Понеже Λ е верига, то без ограничение на общността на разглежданията можем да считаме, че $\mathrm{B}_0 \subseteq \mathrm{B}_1$. Тогава $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1 \in \mathrm{B}_1$. Но B_1 е верига в $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$, откъдето x_0 и x_1 са R-сравними. Следователно $\cup\Lambda$ е верига в $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle$, т.е. $\cup\Lambda \in \mathcal{A}$.

Определение 2Д.6. *Нека $\langle A_1, R_1\rangle$ и $\langle A_2, R_2\rangle$ са ч.н.м. Казваме, че те са изоморфни ($\langle A_1, R_1\rangle \cong \langle A_2, R_2\rangle$), ако съществува биекция $f : A_1 \to A_2$ такава, че*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)[\langle x, y\rangle \in R_1 \leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in R_2].$$

Ще казваме, че $\langle A_1, R_1\rangle$ е изоморфно вложимо в $\langle A_2, R_2\rangle$, ако съществува инекция $f : A_1 \to A_2$, която е изоморфизъм между $\langle A_1, R_1\rangle$ и индуцираното н.м. $\langle f[A_1], R_2 \cap (f[A_1] \times f[A_1])\rangle$.

Теорема 2Д.7. *Нека $\langle A, \leq\rangle$ е ч.н.м. Тогава то е изоморфно вложимо в $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)}\rangle$.*

Доказателство. За всяко $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, да означим с $\mathrm{O(a)}$ множеството

$$\mathrm{O(a)} = \{\mathrm{x} \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \&\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{a}\rangle \in \mathrm{R}\}.$$

Да забележим първо, че ако $\mathrm{O(a)} = \mathrm{O(b)}$, то $\mathrm{a} = \mathrm{b}$. Действително, тогава $\mathrm{a} \in \mathrm{O(a)}$ и $\mathrm{b} \in \mathrm{O(b)}$, понеже R е рефлексивна. Следователно $\mathrm{a} \in \mathrm{O(b)}$ и $\mathrm{b} \in \mathrm{O(a)}$, откъдето $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathrm{R}$ и $\langle \mathrm{b}, \mathrm{a}\rangle \in \mathrm{R}$. Сега от антисиметричността на R получаваме, че $\mathrm{a} = \mathrm{b}$.

Освен това $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathrm{R}$ влече, че $\mathrm{O(a)} \subseteq \mathrm{O(b)}$. Наистина, нека $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathrm{R}$ и $\mathrm{x} \in \mathrm{O(a)}$. Тогава $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a}\rangle \in \mathrm{R}$ и от транзитивността на R получаваме, че $\langle \mathrm{x}, \mathrm{b}\rangle \in \mathrm{R}$. Така $\mathrm{x} \in \mathrm{O(b)}$ и, следователно, $\mathrm{O(a)} \subseteq \mathrm{O(b)}$.

От направените наблюдения можем да заключим, че изображението $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathcal{P}(\mathrm{A})$ определено, чрез $\mathrm{f(a)} = \mathrm{O(a)}$ за всяко $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ е инективно и запазва наредбата. Следователно то е изоморфно влагане на $\langle \mathrm{A}, \mathrm{R}\rangle$ в $\langle \mathcal{P}(\mathrm{A}), \subseteq_{\mathcal{P}(\mathrm{A})}\rangle$. ⊣

2Е. Сравняване на мощности

При дадени множества A и B ще използваме означенията: $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ за да изразим, че има взаимно еднозначно съответствие (биекция) между A и B; $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ за да изразим, че има биекция между A и някое подмножество на B, т.е. че има инекция от A към B; $\overline{\overline{\mathrm{A}}} < \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ за да изразим, че има биекция между A и някое строго подмножество на B, но не и със самото B. Така $\overline{\overline{\mathrm{A}}} < \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ е равносилно на $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ и $\neg(\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}})$.

В случай, че $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ ще казваме, че множествата A и B са равномощни (имат равни мощности); ако пък $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ (съответно, $\overline{\overline{\mathrm{A}}} < \overline{\overline{\mathrm{B}}}$) ще казваме, че мощността на A е по-малка или равна на (съответно, строго по-малка от) мощността на B.

Забележете, че горните три отношения между A и B определяме напълно независимо от понятието за мощност на множество. Така по никакъв начин в означението $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}}$ не описваме какво изразяват $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ и $\overline{\overline{\mathrm{B}}}$. По-нататък за всяко множество A ще определим неговата мощност $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ като подходящо множество. Тази дефиниция ще бъде съгласувана със споменатите вече отношения.

Следват няколко прости свойства, чието доказателство ще пропуснем:

- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}$;
- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}} \ \rightarrow\ \overline{\overline{\mathrm{B}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}$;
- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{B}}}\ \&\ \overline{\overline{\mathrm{B}}} = \overline{\overline{\mathrm{C}}} \ \rightarrow\ \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{C}}}$
- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{A}}}$;
- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{B}}}\ \&\ \overline{\overline{\mathrm{B}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{C}}} \ \rightarrow\ \overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{C}}}$.

Твърдение 2E.1. *За всеки две множества A и a е в сила, че:*

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \times \{a\}}}.$$

Доказателство. Разгледайте биекцията $\mathrm{f} : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} \times \{\mathrm{a}\}$, определена за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ чрез: $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle$. ⊣

Теорема 2E.2 (Cantor)**.** *За всяко множество A, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.*

Доказателство. Първо да забележим, че функцията $\mathrm{f} : \mathrm{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{A})$, определена чрез $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \{\mathrm{a}\}$ за всяко $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, е инективна. Следователно $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathrm{A})}}$.

Сега да предположим, че A е множество равномощно със степенното си множество, $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathrm{A})}}$. Нека $\mathrm{g} : \mathrm{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{A})$ е биекция, свидетелства за тази равномощност. Нека

$$\mathrm{R} = \{\mathrm{a} \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}\ \&\ \mathrm{a} \notin \mathrm{g}(\mathrm{a})\}.$$

Да забележим, че R е подмножество на A. Понеже g е сюрективна, то $\mathrm{R} = \mathrm{g}(\mathrm{b})$ за някое $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$. Тогава:

$$\mathrm{b} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{b} \notin \mathrm{g}(\mathrm{b}) \leftrightarrow \mathrm{b} \notin \mathrm{R}.$$

Противоречие. Следователно $\overline{\overline{\mathrm{A}}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathrm{A})}}$. ⊣

Оказва се, че съвкупността на всички множества, равномощни с дадено непразно множетсво, е толкова обширна, че самата тя не образува множество. Забележете, че въпреки това тя е определима. Казано иначе, в нашата вселена V, нито един клас на еквивалентност по класрелацията на равномощност, който не съдържа ∅, не е множество.

Следствие 2E.3. *Нека $A \neq \varnothing$. Тогава:*

$$\neg(\exists B)(\forall x)[x \in B \leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}}].$$

Доказателство. Нека A е произволно непразно множество, и да допуснем, че множеството B съдържа всички равномощни с A множества. Понеже за произволно множество a е в сила, че $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{\mathrm{A} \times \{\mathrm{a}\}}}$, то за всяко множество a, $\mathrm{A} \times \{\mathrm{a}\} \in \mathrm{B}$. Да разгледаме множеството:

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \&\ (\exists\, \mathrm{a})[\mathrm{x} = \mathrm{A} \times \{\mathrm{a}\}]\}.$$

Понеже за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$, $\mathrm{Rel}(\mathrm{x})$, то $\mathrm{Rel}(\cup\mathrm{C})$.

Нека a е произволно множество. Тогава $\mathrm{a} \in \mathrm{Rng}(\mathrm{A}\times\{\mathrm{a}\})$. Тъй като $\mathrm{A}\times\{\mathrm{a}\} \in \mathrm{C}$, то $\mathrm{A}\times\{\mathrm{a}\} \subseteq \cup\mathrm{C}$ и, следователно, $\mathrm{Rng}(\mathrm{A}\times\{\mathrm{a}\}) \subseteq \mathrm{Rng}(\cup\mathrm{C})$. Тогава $\mathrm{a} \in \mathrm{Rng}(\cup\mathrm{C})$. Следователно множеството $\cup\mathrm{C}$ съдържа всяко множество. Противоречие. ⊣

Лесно можем да покажем и, че разлините мощности на множества са толкова разнообразни, че не образуват множество. По-точно ще покажем, че съвкупността, която съдържа по един представител от всяка мощност не е множество. Казано иначе, фактор-класът на вселената ни V по клас-релацията на равномощност не е множество.

Следствие 2E.4. $\neg(\exists A)(\forall x)(\exists! y)[y \in A \ \&\ \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}]$.

Доказателство. Да предположим, че A е такова множество, че за всяко множество x съществува единствено множество $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$, за което $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\overline{\mathrm{y}}}$.

Тогава, за всяко $(\forall\, \mathrm{x})[\overline{\overline{\mathrm{x}}} \leq \overline{\overline{\cup\mathrm{A}}}]$. Действително, нека x е произволно и y е равномощно с него такова, че $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$. Тогава $\mathrm{y} \subseteq \cup\mathrm{A}$, откъдето $\mathrm{y} \subseteq \cup\mathrm{A}$. Така $\overline{\overline{\mathrm{x}}} \leq \overline{\overline{\cup\mathrm{A}}}$.

Следователно $\overline{\overline{\mathcal{P}(\cup\mathrm{A})}} \leq \overline{\overline{\cup\mathrm{A}}}$. Противоречие. ⊣

Като заключение можем да получим, че съвкупността V на всички множества не е множество.

Следствие 2E.5. $\neg(\exists A)(\forall x)[x \in A]$.

Доказателство. Да допуснем, че A е множество, съдържащо всички множества. Тогава $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{A}$, в частност $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathrm{A})}} \leq \overline{\overline{\mathrm{A}}}$. Противоречие с Теоремата на Cantor. ⊣

Доказателство на последното може да се получи и като резултат от това, че класът $\{\mathrm{x} \mid \overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}\}$ не е множество (Следствие (2E.3)) и тривиалното наблюдение, че $\{\mathrm{x} \mid \overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}\} \subseteq \mathrm{V}$.

Глава 3

Ординални числа

3A. Добре наредени множества

Определение 3A.1. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е ч.н.м. Ще казваме, че то е добре наредено множество (д.н.м.) и, че $\leq$ е добра наредба в W, ако всяко непразно подмножество B на W има най-малък елемент относно $\leq$:*

$$(\forall B)[B \neq \varnothing \;\&\; B \subseteq W \to (\exists y)[y \in B \;\&\; (\forall x)[x \in B \to y \leq x]]].$$

Често използвана и, еквивалентна на горната, е и дефиницията, че д.н.м. е такова л.н.м., в което всяко непразно подмножества има минимален елемент.

Упражнение 3A.2. *Докажете, че горните две дефиниции са еквивалентни.*

Например, множеството на естествените числа ω с обичайната наредба е д.н.м., както и всеки негов начален отрез. Друг пример е пак ω с наредбата $\leq_1$ определена, чрез:

$$\mathrm{n} <_1 \mathrm{k} \leftrightharpoons (2 \mid \mathrm{n} \;\&\; 2 \not| \mathrm{k}) \vee (2 \mid (\mathrm{n} - \mathrm{k}) \;\&\; \mathrm{n} < \mathrm{k}).$$

Тази релация нарежда естествените числа по следния начин:

$$0 <_1 2 <_1 4 <_1 \ldots <_1 2\mathrm{n} <_1 \ldots <_1 1 <_1 3 <_1 \ldots <_1 2\mathrm{n}+1 <_1 \ldots$$

Не е трудно да се съобрази и, че всяка крайно л.н.м. всъщност е д.н.м. Ако $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м. и $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{W}$, то индуцираното ч.н.м. $\langle \mathrm{I}, \leq \cap (\mathrm{I} \times \mathrm{I}) \rangle$ също е д.н.м., което ако не довежда до двусмислие, ще означаваме само с $\langle \mathrm{I}, \leq \rangle$.

Всяко д.н.м. $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ прилича на начален сегмент на ω в началото си. Ако W не е празно, трябва да има най-малък елемент, който ако не е казано изрично друго, ще означаваме с 0_{W}, или само с 0, когато W се подразбира:

$$0 = 0_{\mathrm{W}} = min_{\leq} \mathrm{W}.$$

С изключение на най-големия елемент (който може да съществува, а може и да не), всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{W}$ има непосредствен наследник – именно най-малкия елемент на множеството от елементите над x,

$$\mathrm{S(x)} \leftrightharpoons \mathit{min}_{\leq}\{\mathrm{y} \in \mathrm{W} \ \mid \ \mathrm{x} < \mathrm{y}\}.$$

Елемента S(x) ще наричаме *наследник* на x.

Забележете, че най-малкият елемент 0_{W} не е наследник на никой елемент. Възможно е, разбира се, да има и други елементи, които не са наследници. Тези елементи ще наричаме *гранични*:

$$\mathrm{Limit(x)} \leftrightharpoons 0_{\mathrm{W}} < \mathrm{x} \ \& \ \neg(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{x} = \mathrm{S(y)}].$$

Ще казваме, че $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{W}$ е *начален сегмент* на д.н.м. $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$, ако е затворено надолу относно $\leq$:

$$(\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{I})(\forall\, \mathrm{y} < \mathrm{x})[\mathrm{y} \in \mathrm{I}].$$

Ако $\mathrm{x} \in \mathrm{W}$, то *начален сегмент* на x ще наричаме множеството seg(x) от елементите под x:

$$\mathrm{seg(x)} \leftrightharpoons \{\mathrm{y} \in \mathrm{W} \ \mid \ \mathrm{y} < \mathrm{x}\}.$$

Упражнение 3A.3. *Докажете, че*

$$\mathit{seg}(0_W) = \varnothing \ \text{ и } \ \mathit{seg}(S(x)) = \mathit{seg}(x) \cup \{x\}.$$

Упражнение 3A.4. *Нека x е граничен елемент. Тогава*

$$\mathit{seg}(x) = \cup\{\mathit{seg}(y) \ \mid \ y \in \mathit{seg}(x)\}.$$

Не е трудно да се съобрази, че което и x от W да вземем, началният му сегмент е начален сегмент на W. В случая, когато се намираме в д.н.м., е вярно и обратното.

Твърдение 3A.5. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е д.н.м. и $I \subseteq W$ е начален сегмент. Тогава или $I = W$, или $I = \mathit{seg}(x)$, за някое $x \in W$.*

Доказателство. Нека $\mathrm{I} \neq \mathrm{W}$ е начален сегмент и $\mathrm{x} = \mathit{min}_{\leq}(\mathrm{W} \setminus \mathrm{I})$. Ако $\mathrm{y} \in \mathrm{seg(x)}$, то $\mathrm{y} \notin \mathrm{W} \setminus \mathrm{I}$ и, следователно, $\mathrm{y} \in \mathrm{I}$. Ако $\mathrm{y} \in \mathrm{I}$ и допуснем, че $\mathrm{y} \not< \mathrm{x}$, то тогава $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$, откъдето $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$ – противоречие. Следователно $\mathrm{y} < \mathrm{x}$. Така $\mathrm{I} = \mathrm{seg(x)}$. ⊣

Упражнение 3A.6. *Дайте пример за л.н.м., в което горното твърдение не е в сила.*

Нека $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е ч.н.м. Ще казваме, че $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{W}$ е $\leq$-индуктивно, ако:

$$(\forall\, \mathrm{x})[(\forall\, \mathrm{y})[\mathrm{y} < \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{y} \in \mathrm{U}] \rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{U}].$$

Оказва се, че ако $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м., то единственото $\leq$-индуктивно множество е самото W.

Твърдение 3А.7. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е д.н.м. и U е $\leq$-индуктивно. Тогава $U = W$.*

Доказателство. Нека U е като в условието и да допуснем, че $\mathrm{U} \neq \mathrm{W}$. Нека $\mathrm{x} = min(\mathrm{W} \setminus \mathrm{U})$, в частност $\mathrm{x} \notin \mathrm{U}$ и за всяко $\mathrm{y} < \mathrm{x}$, $\mathrm{y} \in \mathrm{U}$. Сега от $\leq$-индуктивността на U, заключаваме, че $\mathrm{x} \in \mathrm{U}$. Противоречие. ⊣

Следващото твърдение показа, че добре наредените множества могат да бъдат характеризирани измежду линейно наредените именно като тези, в които единственото индуктивно множество е самият носител на наредбата.

Твърдение 3А.8. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е л.н.м., в което единственото $\leq$-индуктивно множество е W. Тогава $\langle W, \leq \rangle$ е д.н.м.*

Доказателство. Нека $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е както в условието. Нека $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{W}$ е произволно. Нека C е множеството от строгите долни граници на множеството B,

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{t} \in \mathrm{W} \;\mid\; (\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{B})[\mathrm{t} < \mathrm{x}]\}.$$

Ясно е, че $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \varnothing$. Възможен е точно един от следните два случая:

(i) C не е $\leq$-индуктивно. Тогава има $\mathrm{t} \in \mathrm{W}$ такова, че $\mathrm{seg}(\mathrm{t}) \subseteq \mathrm{C}$, но $\mathrm{t} \notin \mathrm{C}$. Понеже $\mathrm{t} \notin \mathrm{C}$, то има $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$, за което $\mathrm{x} \leq \mathrm{t}$. Но $\mathrm{x} \notin \mathrm{seg}(\mathrm{t})$, понеже последното е непресичащо се с B. Следователно, $\mathrm{x} = \mathrm{t}$ и $\mathrm{t} \in \mathrm{B}$. Така t е най-малкият елемент на B, защото всеки по-малък от него е в $\mathrm{seg}(\mathrm{t})$, т.е. извън B.

(ii) C е $\leq$-индуктивно. Тогава $\mathrm{C} = \mathrm{W}$ и, следователно, $\mathrm{B} = \varnothing$. ⊣

Определение 3А.9. *Нека $\langle A, \leq \rangle$ е ч.н.м. и $\pi : A \to A$. Казваме, че функцията π е разширяваща (expansive), ако за всяко $x \in A$, $x \leq \pi(x)$.*

Теорема 3А.10. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е д.н.м. и $\pi : W \to W$ е инекция, запазваща наредбата. Тогава π е разширяваща.*

Доказателство. Нека π е както в условието и да допуснем, че не е разширяваща. Тогава множеството $\{\mathrm{x} \in \mathrm{W} \;\mid\; \pi(\mathrm{x}) < \mathrm{x}\}$ няма да бъде празно и, нека x^* е най-малият му елемент. Следователно $\pi(\mathrm{x}^*) < \mathrm{x}^*$, откъдето $\pi(\pi(\mathrm{x}^*)) < \pi(\mathrm{x}^*)$ понеже инекцията π запазва наредбата. Но това е противоречие с избора на x^*. ⊣

Следствие 3А.11. *Никое д.н.м. не е изоморфно на свой собствен начален сегмент.*

Доказателство. Нека $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м. и $\mathrm{I} \subsetneq \mathrm{W}$ е собствен начален сегмент на W. Да допуснем, че $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle \cong \langle \mathrm{I}, \leq \rangle$ и нека π е изоморфизъм между тях. Понеже I собствен начален сегмент, то съществува $\mathrm{t} \in$

W, за което $I = seg(t)$. Понеже $\pi : W \to W$ е инекция, запазваща наредбата, то тя е и разширяваща. В частност, $t \leq \pi(t)$. Но $\pi(t) \in I = seg(t)$, откъдето $\pi(t) < t$. Противоречие. $\dashv$

Следствие 3А.12. *Между две д.н.м. съществува най-много един изоморфизъм.*

Доказателство. Нека $\langle W_1, \leq_1\rangle$ и $\langle W_2, \leq_2\rangle$ са две изоморфни помежду си д.н.м. Нека π и ψ са два изоморфизма между тях и да допуснем, че $\pi \neq \psi$. Нека x^* е най-малкият елемент на W_1, който ги различава:

$$x^* = min_{\leq_1}\{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\}.$$

В частност, $\pi(x^*) \neq \psi(x^*)$, като и двата са елементи на W_2. Без ограничение на общността на разглежданията, можем да считаме че $\pi(x^*) <_2 \psi(x^*)$. Нека тогава $y \in W_1$ е такова, че $\psi(y) = \pi(x^*) <_2 \psi(x^*)$. Понеже ψ е изоморфизъм, то $y <_1 x^*$. Сега от избора на x^* следва, че $\pi(y) = \psi(y) = \pi(x^*)$. Последното противоречи на факта, че π е изоморфизъм. Следователно, $\pi = \psi$. $\dashv$

Ще казваме, че една частично наредено множество е *твърдо*, ако не притежава нетривиални автоорфизми. От горното твърдение директно получаваме твърдостта на д.н.м.

Следствие 3А.13. *Всяко добре наредено множество е твърдо.*

Теорема 3А.14. *Нека $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ са д.н.м. Тогава е в сила точно едно от трите:*

- *$\mathcal{W}_1$ е изоморфно на $\mathcal{W}_2$,*
- *$\mathcal{W}_1$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $\mathcal{W}_2$,*
- *$\mathcal{W}_2$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $\mathcal{W}_1$.*

Във всеки един от случаите, изоморфизмът е единствен.

Доказателство. Нека $\mathcal{W}_1 = \langle W_1, \leq_1\rangle$ и $\mathcal{W}_2 = \langle W_2, \leq_2\rangle$ са д.н.м. От Следствие 3А.11 следва, че трите възможности са взаимно изключващи се. Единствеността на изоморфизма във всеки един от случаите следва пък от Следствие 3А.12.

По-нататък за всяко $a \in W_1$ с $\mathcal{W}_1(a)$ да означим д.н.м. $\langle seg(a), \leq_1\rangle$ на началния сегмент на a в W_1 с индуцираната от $\leq_1$ наредба. Подобно ще бъде и означението $\mathcal{W}_2(b)$ за всяко $b \in W_2$.

Нека $f \subseteq W_1 \times W_2$ е релацията:

$$f = \{\langle a, b\rangle \in W_1 \times W_2 \mid \mathcal{W}_1(a) \cong \mathcal{W}_2(b)\}.$$

Първо да забележим, че f е функция. Наистина, нека $\langle a, b\rangle, \langle a, b'\rangle \in f$. Да предположим, че $b \neq b'$. Без ограничение на общността на разглежданията можем да считаме, че $b <_2 b'$. Имаме, че $\mathcal{W}_2(b) \cong \mathcal{W}_2(b')$, понеже и двете са изоморфни на $\mathcal{W}_1(a)$. Но така д.н.м. $\mathcal{W}_2(b')$ е изоморфно на началния си сегмент $\mathcal{W}_2(b)$. Противоречие. Следователно $b = b'$.

По напълно подобен начин се вижда, че и f^{-1} е функция, откъдето следва, че f е мономорфизъм. Освен това f запазва и наредбата, т.е. за всеки $a <_1 a'$ от $\mathrm{Dom}(f) \subseteq W_1$, е в сила, че $f(a) <_2 f(a')$. Наистина, нека $a, a' \in \mathrm{Dom}(f)$ и $a <_1 a'$. Нека h е изоморфизмът между $\mathcal{W}_1(a')$ и $\mathcal{W}_2(f(a'))$. Тогава рестрикцията $h \restriction \mathrm{seg}(a)$ е изоморфизмът между $\mathcal{W}_1(a)$ и $\mathcal{W}_2(h(a))$. Следователно $f(a) = h(a) <_2 f(a')$.

Да забележим също, че дефиниционната област $\mathrm{Dom}(f)$ на f е начален сегмент на $\mathcal{W}_1$. За целта нека $a \in \mathrm{Dom}(f)$ и $c \leq_1 a$. Нека h е изоморфизмът между $\mathcal{W}_1(a)$ и $\mathcal{W}_2(f(a))$. Тогава $h \restriction \mathrm{seg}(c)$ е изоморфизъм между $\mathcal{W}_1(c)$ и $\mathcal{W}_2(h(c))$. Следователно $c \in \mathrm{Dom}(f)$ и така $\mathrm{Dom}(f)$ е затворено надолу. Напълно аналогично се показва и, че областта от стойностите $\mathrm{Rng}(f)$ на f е начален сегмент на $\mathcal{W}_2$.

Следователно f е изоморфизъм между $\mathrm{Dom}(f) \subseteq W_1$ и $\mathrm{Rng}(f) \subseteq W_2$. Остана да докажем, че е изпълнено поне едно от $\mathrm{Dom}(f) = W_1$ или $\mathrm{Rng}(f) = W_2$. За целта да допуснем противното, т.е. $\mathrm{Dom}(f) \neq W_1$ и $\mathrm{Rng}(f) \neq W_2$. Понеже и двете са собствени начални сегменти съответно на $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$, то съществуват $a \in W_1$ и $b \in W_2$ такива, че $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{seg}(a)$ и $\mathrm{Rng}(f) = \mathrm{seg}(b)$. Но тогава $\langle a, b\rangle \in f$, откъдето $a \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{seg}(a)$. Противоречие. $\dashv$

3Б. Ординали

В този раздел ще въведем понятието за ординално число (или просто ординал) и ще изследваме основните му свойства. Изрично отбелязваме, че в последащите доказателства не се използват аксиомите за избора и за регулярност, нито пък аксиомната схема за замяна. Определението за ординално число ще следва дефиницията на von Neuman.

Определението ни за ординално число се състои от две независими части. Първата от тях касае вече въведеното понятие за транзитивно множество:

$$\mathrm{trans}(x) \leftrightharpoons (\forall y)(\forall z)[y \in z \;\&\; z \in x \to y \in x].$$

Втората част е свързана с понятието за $\in$-добра нареденост. Именно, множеството x е $\in$-добре наредено, ако всеки два негови елемента са сравними относно принадлежност и, ако всяко непразно негово подмножество има минимален елемент относно принадлежността:

$$\begin{aligned}\in WO(\mathrm{x}) \leftrightharpoons (\forall\,\mathrm{y})(\forall\,\mathrm{z})[\mathrm{y}\in\mathrm{x}\ \&\ \mathrm{z}\in\mathrm{x}\to\mathrm{y}\in\mathrm{z}\vee\mathrm{y}=\mathrm{z}\vee\mathrm{z}\in\mathrm{y}]\ \&\\ (\forall\,\mathrm{u})[\mathrm{u}\neq\varnothing\ \&\ \mathrm{u}\subseteq\mathrm{x}\to(\exists\,\mathrm{y})[\mathrm{y}\in\mathrm{u}\ \&\ \mathrm{y}\cap\mathrm{u}=\varnothing]].\end{aligned}$$

Да забележим, че ако $\in WO(\mathrm{x})$ и u е непразно подмножество на x, то съществува единствено $\mathrm{y}\in\mathrm{u}$ такова, че $\mathrm{y}\cap\mathrm{u}=\varnothing$. Действително, да предположим, че $\mathrm{y}_1\neq\mathrm{y}_2$ са два различни помежду им елемента на непразното подмножество u на x и $\mathrm{y}_1\cap\mathrm{u}=\mathrm{y}_2\cap\mathrm{u}=\varnothing$. Но $\in WO(\mathrm{x})$, откъдето $\mathrm{y}_1\in\mathrm{y}_2$ или $\mathrm{y}_2\in\mathrm{y}_1$. Без ограничение на общността на разглежданията можем да считаме, че $\mathrm{y}_1\in\mathrm{y}_2$. Но тогава $\varnothing\neq\{\mathrm{y}_1\}\subseteq\mathrm{y}_2\cap\mathrm{u}$. Противоречие. Следователно, u има най-малък елемент относно принадлежността.

Определение 3Б.1. *Ще казваме, че множеството x е ординал, ако е едновременно транзитивно и $\in$-добре наредено,*

$ord(x)\leftrightharpoons trans(x)\ \&\ \in WO(x).$

По-нататък ординалните числа ще означаваме с малки гръцки букви: $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\omega$. Ще направим и следната уговорка – ако някой обект е означен с малка гръцка буква, ще считаме, че той е ординал. В тази връзка, означението $\forall\,\alpha\varphi(\alpha,\overline{u})$ ще бъде съкращение за $(\forall\,\alpha)[ord(\alpha)\to\varphi(\alpha,\overline{u})]$. Дуално, $\exists\,\alpha\varphi(\alpha,\overline{u})$ ще бъде съкращение за $(\exists\,\alpha)[ord(\alpha)\ \&\ \varphi(\alpha,\overline{u})]$.

Въвеждаме също и следните две означение над ординалите:

$$\alpha<\beta\leftrightharpoons\alpha\in\beta \text{ и } \alpha\leq\beta\leftrightharpoons\alpha<\beta\vee\alpha=\beta.$$

По-нататък, ако x е множество с $\in_{\mathrm{x}}$ ще означаваме релацията, отразяваща принадлежността, ограничена до елементите на x,

$$\in_{\mathrm{x}}=\{\langle\mathrm{y},\mathrm{z}\rangle\ \mid\ \mathrm{y}\in\mathrm{x}\ \&\ \mathrm{z}\in\mathrm{x}\ \&\ \mathrm{y}\in\mathrm{z}\}.$$

Следващата теорема обобщава основните свойства на ординалните числа.

Теорема 3Б.2. *Нека α,β и γ са ординални числа, а x е множество. Тогава:*

(1) $\alpha\notin\alpha$, $(\forall\,z)\neg[z\in\alpha\ \&\ \alpha\in z]$, $(\forall\,y\in\alpha)(\forall\,z\in\alpha)\neg[y\in z\ \&\ z\in y]$;
(2) $\alpha<\beta\ \&\ \beta<\gamma\to\alpha<\gamma$;
(3) $\neg(\alpha<\alpha)$, $\alpha<\beta\to\neg(\beta<\alpha)$;

(4) $ord(S(\alpha))$, $\alpha < S(\alpha)$, $\neg(\exists\,\beta)[\alpha < \beta \mathbin{\&} \beta < S(\alpha)]$;
(5) $x \in \alpha \to ord(x)$;
(6) $x \subseteq \alpha \mathbin{\&} trans(x) \to x = \alpha \vee x \in \alpha$;
(7) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$;
(8) $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$;
(9) $\alpha < \beta \leftrightarrow S(\alpha) \leq \beta$;
(10) $(\forall\, y \in x)[ord(y)] \to \in WO(x) \mathbin{\&} ord(\cup x)$;
(11) $(\forall\, y \in x)[ord(y)]$ *влече, че* $\langle x, \in_x\rangle$ *е строго добре наредено множество;*
(12) $(\forall\, y \in x)[ord(y)] \to [\cup x \leq \beta \leftrightarrow (\forall\, \alpha \in x)[\alpha \leq \beta]]$;
(13) $(\forall\, y \in x)[ord(y)] \to (\exists\, \beta)[(\forall\, \alpha \in x)[\alpha < \beta]]$;
(14) $\neg(\exists\, A)(\forall\, x)[ord(x) \to x \in A]$;
(15) $x \neq \varnothing \mathbin{\&} (\forall\, y \in x)[ord(y)] \to (\exists\, \alpha \in x)(\forall\, y \in x)[\alpha \leq y]$;

Доказателство.

(1) Да предположим, че α е такъв ординал, че $\alpha \in \alpha$. Тогава $\varnothing \neq \{\alpha\} \subseteq \alpha$. Следователно, съществува $\mathrm{y} \in \{\alpha\}$, за което $\mathrm{y} \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Да забележим, че за всяко y от $\{\alpha\}$, е в сила, че $\mathrm{y} = \alpha$. Следователно, $\alpha \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Така, вземайки предвид предположението ни, че $\alpha \in \alpha$, получаваме, че $\{\alpha\} \subseteq \alpha \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Противиречие. Следователно $\alpha \notin \alpha$.

Да предположим, че z и α са такива, че $\mathrm{z} \in \alpha$ и $\alpha \in \mathrm{z}$. От транзитивността на α получаваме, че $\alpha \in \alpha$. Противоречие.

Да предположим накрая, че x и y са елементи на α. Но тогава $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} \subseteq \alpha$ и е непразно. Следователно, по $\in$-добрата нареденост на α, $\mathrm{x} \cap \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} = \varnothing$ или $\mathrm{y} \cap \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} = \varnothing$. Тогава, $\mathrm{y} \notin \mathrm{x}$ или $\mathrm{x} \notin \mathrm{y}$.

(2) Твърдението следва от транзитивността на ординала γ.

(3) $\neg(\alpha < \alpha)$ е еквивалентно на $\alpha \notin \alpha$.

Да допуснем, че α и β са такива, че $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$. Тогава $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \alpha$, откъдето по транзитивността на α, получаваме че $\alpha \in \alpha$. Противоречие.

(4) Понеже $\mathrm{trans}(\alpha)$, то и $\mathrm{trans}(\mathrm{S}(\alpha))$. Остава да покажем, че $\mathrm{S}(\alpha)$ е $\in$-добре наредено. Първо нека $\mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{S}(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Ще покажем, че $\mathrm{y} \in \mathrm{z} \vee \mathrm{y} = \mathrm{z} \vee \mathrm{z} \in \mathrm{y}$. Ако $\mathrm{y}, \mathrm{z} \in \alpha$, то свойството е изпълнено, защото α е ординал. Ако $\mathrm{y} \in \alpha, \mathrm{z} = \alpha$ или $\mathrm{y} = \alpha, \mathrm{z} \in \alpha$, то имаме $\mathrm{y} \in \mathrm{z}$ или $\mathrm{z} \in \mathrm{y}$, т.е. свойството е изпълнено. Ако $\mathrm{y} = \alpha$ и $\mathrm{z} = \alpha$, то $\mathrm{y} = \mathrm{z}$ и свойството пак е изпълнено.

Нека сега $\varnothing \neq \mathrm{u} \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$. Нека $\mathrm{u}' = \mathrm{u} \setminus \{\alpha\}$. Ако $\mathrm{u}' = \varnothing$, то $\mathrm{u} = \{\alpha\}$. Следователно, $\alpha \cap \mathrm{u} = \alpha \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Нека $\mathrm{u}' \neq \varnothing$.

Това заедно с $u' \subseteq \alpha$ ни дават $y \in u' \subseteq u$ такова, че $y \cap u' = \varnothing$. Но тогава $y \cap u = \varnothing$. Наистина, имаме, че

$$y \cap u \subseteq y \cap (u' \cup \{\alpha\}) = (y \cap u') \cup (y \cap \{\alpha\}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing,$$

понеже $y \in u' \subseteq \alpha$ и, следователно, $\alpha \notin y$. Тогава $S(\alpha)$ е ординал.

Тъй като $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$, то $\alpha < S(\alpha)$.

Да допуснем, че $\alpha < \beta$ и $\beta < S(\alpha)$. Тогава $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, откъдето $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$. Противоречие.

(5) Нека $x \in \alpha$. Първо ще покажем, че $trans(x)$. За целта нека $y \in x$ и $z \in y$. Но $x \in \alpha$, откъдето по транзитивността на α получаваме, че $y \in \alpha$, откъдето пак по нея заключаваме, че $z \in \alpha$. От $\in$-добрата нареденост на α следва, че е изпълнено едно от трите: $z \in x$, $z = x$ или $x \in z$. Ако $x = z$, то за елементите x и y на α ще бъде изпълнено $x \in y, y \in x$ – противоречие. Ако пък $x \in z$, то ще имаме три елемента x, y, z на α, за които $x \in z, z \in y, y \in x$. По аналогия с 1 не е трудно да се съобрази, че такава ситуация също е невъзможна. Така остава $z \in x$. Следователно, $trans(x)$.

Накрая да се спрем на $\in$-добрата нареденост на x. Нека $z \in x$ и $y \in x$. Тогава по транзитивността на α, получаваме $z \in \alpha$ и $y \in \alpha$. Сега, от $\in WO(\alpha)$ заключаваме, че $y \in z \vee y = z \vee z \in y$.

Нека $\varnothing \neq u \subseteq x$. Тогава $trans(\alpha)$ влече $u \subseteq \alpha$. Следователно, по $\in WO(\alpha)$, съществува $y \in u$ такова, че $y \cap u = \varnothing$. Тогава $\in WO(x)$.

(6) Нека $x \subseteq \alpha$ и $trans(x)$. Нека $u = \alpha \setminus x$. Ако $u = \varnothing$, то $x = \alpha$. Нека сега $u \neq \varnothing$. Тогава нека y е единственото множество, за което $y \in u$ и $y \cap u = \varnothing$. Тогава $x = y$.

Действително, нека първо $z \in x$ е произволен. Но тогава $z \in \alpha$ и $y \in \alpha$ и, следователно, е в сила едно от трите $z \in y$, $z = y$ или $y \in z$. Ако $z = y$, то $y \in x$. Но $y \in u = \alpha \setminus x$. Следователно този случай е невъзможен. Ако $y \in z$, то по транзитивността на x получаваме отново, че $y \in x$. Следователно и този случай е невъзможен. Така остава само $z \in y$, откъдето получаваме, че $x \subseteq y$.

Обратно, нека $z \in y$. От избора на y следва, че $z \notin u$. Освен това, $z \in y$ и $y \in \alpha$, откъдето по транзитивността на α имаме, че $z \in \alpha$. Следователно $z \in \alpha \setminus u = x$. Така $x = y$.

Накрая, имаме, че $x = y \in u \subsetneq \alpha$, откъдето $x \in \alpha$.

(7) Нека $\alpha \leq \beta$. Тогава $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$. Ако $\alpha < \beta$, то $\alpha \in \beta$. Сега trans(β) ни дава, че $\alpha \subseteq \beta$. Ако пък $\alpha = \beta$ директно имаме $\alpha \subseteq \beta$.

Нека $\alpha \subseteq \beta$. Тогава trans(α) и свойство 6. ни дават, че $\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta$. Следователно, $\alpha \leq \beta$.

(8) Нека α и β са ординали. Нека $x = \alpha \cap \beta$. Понеже trans(α) и trans(β), то като сечение на транзитивни множества и самото x е транзитивно, trans(x). От $x \subseteq \alpha$ и $x \subseteq \beta$ по 6. заключаваме, че $x = \alpha \vee x \in \alpha$ и $x = \beta \vee x \in \beta$. Възможни са следните четири случая:

$x = \alpha$ и $x = \beta$: тогава $\alpha = \beta$;

$x = \alpha$ и $x \in \beta$: тогава $\alpha \in \beta$;

$x \in \alpha$ и $x = \beta$: тогава $\beta \in \alpha$;

$x \in \alpha$ и $x \in \beta$: тогава $x \in \alpha \cap \beta = x$. Но x е елемент на ординал, следователно ord(x). Противоречие.

(9) Нека $\alpha < \beta$, т.е. $\alpha \in \beta$. Нека $x \in S(\alpha)$ е произволно. Тогава $x \in \alpha \vee x = \alpha$, откъдето $x \in \beta$. Следователно, $S(\alpha) \subseteq \beta$. Така по свойство 7. получаваме, че $S(\alpha) \leq \beta$.

Нека сега $S(\alpha) \leq \beta$. Тогава по 7., $S(\alpha) \subseteq \beta$, т.е. $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. Следователно, $\alpha \in \beta$, т.е. $\alpha < \beta$.

(10) Първо ще покажем, че x е $\in$-добре наредено. За целта нека $y, z \in x$. Тогава ord(y) и ord(z). По свойство 8. получаваме, че $y < z \vee y = z \vee z < y$. Така $y \in z \vee y = z \vee z \in y$.

Нека $\varnothing \neq u \subseteq x$. Нека α е ординал такъв, че $\alpha \in u$. Нека $u' = \alpha \cap u$. Ако $u' = \varnothing$, то $\alpha \in u$ и $\alpha \cap u = \varnothing$. Нека $u' \neq \varnothing$. Понеже $u' \subseteq \alpha$ и ord(α), то съществува (единствено) $y \in u'$ такова, че $y \cap u' = \varnothing$. Тогава и $y \cap u = \varnothing$. Наистина, да допуснем противното, т.е. че $y \cap u \neq \varnothing$. Нека $z \in y \cap u$ е свидетел за това, $z \in u \subseteq x$. Следователно, ord(z). Понеже $z \in y$ и $y \in u' \subseteq \alpha$, то $z \in \alpha$. Но $z \in u$, откъдето получаваме, че $z \in u' = \alpha \cap u$. Сега $z \in y$ влече, че $z \in y \cap u' = \varnothing$. Противоречие. Следователно, $y \cap u = \varnothing$. Остава само да забележим, че $y \in u$. Окончателно, $\in WO(x)$.

За да покажем, че ord($\cup$x) е достатъчно да покажем, че trans($\cup$x) и $\in WO(\cup x)$. Това, че trans($\cup$x) следва директно от това, че всеки елемент на x е ординал, а следователно и транзитивно множество. За да покажем, че $\cup$x е $\in$-добре наредено, е достатъчно да забележим, че всеки негов елемент е ординал и да се възползваме от първата част на това свойство. Действително, ако $y \in \cup x$, то съществува $z \in x$ такова, че $y \in z$. Но z е ординал като елемент на x, откъдето y също ще бъде ординал като елемент на ординала z. Следователно, $\mathrm{ord}(\cup x)$.

(11) Това, че $\langle x, \in_x \rangle$ е строга частична наредба, следва непосредствено от свойствата 2. и 3.

Нека $\varnothing \neq u \subseteq x$. Тогава u има най-малък елемент относно наредбата $\in_x$. Наистина, по 10. имаме, че $\in \, WO(x)$, следователно съществува (единствено) $y \in u$ такова, че $y \cap u = \varnothing$. Ще покажем, че това y е търсеният най-малък елемент, т.е. че

$$(\forall z \in u)[z = y \vee y \in_x z].$$

За целта нека вземем произволно $z \in u$. Тогава $\mathrm{ord}(z)$. Като елемент на u, имаме също $\mathrm{ord}(y)$. Тогава $z \in_x y \vee z = y \vee y \in_x z$. Ако предположим, че е изпълнен първият случай, т.е. че $z \in_x y$, то предвид, че $z \in u$ получаваме, че $z \in y \cap u = \varnothing$. Противоречие. Следователно, y е най-малкият елемент на u. Тогава $\langle x, \in_x \rangle$ е строго добре наредено множество.

(12) Нека $\cup x \leq \beta$. Тогава за всяко $\alpha \in x$, $\alpha \subseteq \cup x$. Следователно, по 7., $\alpha \leq \cup x$, откъдето $\alpha \leq \beta$.

Нека $(\forall \alpha \in x)[\alpha \leq \beta]$. Тогава $(\forall \alpha \in x)[\alpha \subseteq \beta]$. Следователно, $\cup x \subseteq \beta$ и по 7., $\cup x \leq \beta$.

(13) Достатъчно е да вземем произволен ординал над $S(\cup x)$.

(14) Да допуснем, че A множество, в което принадлежи всеки ординал. Използвайки аксиомата за отделяне получаваме множество $B = \{x \mid \mathrm{ord}(x)\}$. Тогава по предишното свойство съществува ординал β, който е строго над всеки елемент на B. В частност, $\beta \notin B$. Противоречие.

(15) Следва непосредствено от 11.

$\dashv$

Да забележим, че $\varnothing$ е ординал. По-нататък, когато използваме $\varnothing$ в ролята му на ординал ще използваме означението 0. Понеже за всеки ординал α, $\varnothing \subseteq \alpha$ и $\varnothing$ е транзитивно множество, то $0 \leq \alpha$. Така 0 е най-малкият ординал. Според горните свойства на ординалите, ординал ще бъде и множеството $S(0) = \{0\}$, за което ще използваме означението 1. По същия начин ординал е и множеството $S(1) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$, за което ще използваме означението 2.

3В. Гранични ординали. Естествени числа

Ще казваме, че един ординал α е *ординал наследник*, ако съществува ординал β такъв, че $\alpha = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$. Всеки ненулев ординал, който не е ординал наследник ще наричаме *граничен*:

$$\mathrm{Limit}(\alpha) \leftrightharpoons \alpha \neq 0 \ \& \ (\forall \beta)[\alpha \neq S(\beta)].$$

Твърдение 3В.1. *Нека α е ненулев ординал. Тогава:*

$$Limit(\alpha) \leftrightarrow \alpha = \cup\alpha.$$

Доказателство. $(\to)$ Нека $\mathrm{Limit}(\alpha)$. В частност $\mathrm{ord}(\alpha)$, откъдето $\mathrm{trans}(\alpha)$. Тогава $\cup\alpha \subseteq \alpha$. За обратното включване, нека $x \in \alpha$ е произволно. Тогава $\mathrm{ord}(x)$ и $x < \alpha$. Сега от (12) на Теорема (3Б.2) получаваме, че $x \leq \cup\alpha$. Понеже α е граничен, то ординалът $S(x)$ също е елемент на α: $S(x) \in \alpha$. Отново по (12) имаме, че $S(x) \leq \cup\alpha$. Сега пък (4) на Теорема (3Б.2) ни дава, че:

$$x < S(x) \leq \cup\alpha,$$

откъдето $x \in \cup\alpha$. Следователно $\alpha = \cup\alpha$.

$(\leftarrow)$ Нека $\alpha \neq 0$ като $\alpha = \cup\alpha$. Да допуснем, че α не е граничен и нека β е такъв ординал, че $\alpha = S(\beta)$. Тогава $\beta \in \alpha$, откъдето $\beta \in \cup\alpha$. Нека ординалът γ е свиедтел за това, т.е. $\beta \in \gamma$ и $\gamma \in \alpha$. Но така $\beta < \gamma < S(\beta)$, което противоречи на (4) от Теорема (3Б.2). Следователно α е граничен ординал. ⊣

В термините на граничните ординали можем да въведем и понятието естествено число.

Определение 3В.2. *Казваме, че ординалът x е естествено число, ако той не е граничен, както и всеки ординал по-малък от него:*

$$Nat(x) \leftrightharpoons ord(x) \ \& \ \neg Limit(x) \ \& \ (\forall y < x)[\neg Limit(y)].$$

Да забележим, че 0 е естесвено число, $\mathrm{Nat}(0)$. Освен това, ако ординалът x е етвествено число, то наследникът му също е такова,

$$(\forall x)[\mathrm{Nat}(x) \to \mathrm{Nat}(S(x))],$$

както и всички ординали преди него:

$$(\forall x)(\forall y)[\mathrm{Nat}(x) \ \& \ y < x \ \to \ \mathrm{Nat}(y)].$$

Оказва се, че в системата на Zermelo-Fraenkel без аксиомата за безкрайност ($\mathtt{ZF} - \mathrm{Inf}$) съществуването на множество, съдържащо всички естествени числа е еквивалентно на съществуването на граничен ординал. Всяко едно от тях, пък е еквивалентно на Аксиомата за безкрайност.

Теорема 3B.3 ($\mathtt{ZF} - \mathrm{Inf}$). *Следните са еквивалентни:*

(1) $(\exists A)(\forall x)[x \in A \leftrightarrow Nat(x)]$;
(2) $(\exists \alpha)[Limit(\alpha)]$;
(3) (*Inf*) $(\exists A)[\varnothing \in A \ \& \ (\forall x)[x \in A \to S(x) \in A]]$.

Доказателство. (1) $\to$ (2): Нека A е множество, чиито елементи са точно естествените числа. Понеже всяко естествено число е ординал, то $\mathrm{ord}(\cup \mathrm{A})$. Ще покажем, че той е и граничен. За целта да допуснем обратното и нека α е такъв, че $\cup \mathrm{A} = \mathrm{S}(\alpha)$. Така $\alpha \in \cup \mathrm{A}$. Тогава нека $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ е такъв, че $\alpha \in \mathrm{x}$. Следователно $\mathrm{Nat}(\mathrm{x})$ и понеже $\alpha < \mathrm{x}$, то $\mathrm{Nat}(\alpha)$. Оттук, $\mathrm{Nat}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\alpha)))$ и така $\mathrm{S}(\cup \mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{S}(\alpha)) \in \mathrm{A}$. Но тогава $\mathrm{S}(\cup \mathrm{A}) \leq \cup \mathrm{A}$, което е противоречие. Следователно $\mathrm{Limit}(\cup \mathrm{A})$.

Да забележим всъщност, че $\mathrm{A} = \cup \mathrm{A}$. Наистина, нека първо $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$. Тогава също $\mathrm{S}(\mathrm{x}) \in \mathrm{A}$. Следователно $\mathrm{S}(\mathrm{x}) \subseteq \cup \mathrm{A}$. Понеже $\mathrm{Nat}(\mathrm{S}(\mathrm{x}))$ като елемент на A, то $\mathrm{S}(\mathrm{x})$ е ординал. Така $\mathrm{S}(\mathrm{x}) \leq \cup \mathrm{A}$ и, следователно, $\mathrm{x} < \mathrm{S}(\mathrm{x}) \leq \cup \mathrm{A}$. Оттук $\mathrm{x} \in \cup \mathrm{A}$.

Нека $\mathrm{x} \in \cup \mathrm{A}$. Нека y е такова, че $\mathrm{x} \in \mathrm{y}$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$. Следователно $\mathrm{Nat}(\mathrm{y})$ и в частност $\mathrm{ord}(\mathrm{y})$. Но тогава $\mathrm{ord}(\mathrm{x})$ и $\mathrm{x} < \mathrm{y}$, което влече $\mathrm{Nat}(\mathrm{x})$. Така $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$.

В заключение, $\cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$ и $\mathrm{Limit}(\mathrm{A})$.

(2) $\to$ (3): Нека α е граничен ординал. В частност, той е ненулев, откъдето $0 \in \alpha$. Нека сега $\mathrm{x} \in \alpha$ е произволно. Тогава $\mathrm{ord}(\mathrm{x})$ и, следователно, $\mathrm{ord}(\mathrm{S}(\mathrm{x}))$. Понеже наследникът на x е най-малкият ординал по-голям от x, то $\mathrm{S}(\mathrm{x}) \leq \alpha$. Но α не е наследник, откъдето $\mathrm{S}(\mathrm{x}) < \alpha$. Така α е индуктивно множество.

(3) $\to$ (1): Нека A е индуктивно множество, т.е. $\varnothing \in \mathrm{A}$ и всеки път когато $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, имаме също $\mathrm{S}(\mathrm{x}) \in \mathrm{A}$. Нека $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \& \ \mathrm{ord}(\mathrm{x})\}$. Тогава $\mathrm{ord}(\cup \mathrm{B})$. Нещо повече $\cup \mathrm{B}$ е граничен ординал. Наистина, да допуснем противното и нека α е такъв, че $\cup \mathrm{B} = \mathrm{S}(\alpha)$. Тогава $\alpha \in \cup \mathrm{B}$ и нека β е свидетел за това. С други думи, $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \mathrm{B}$. Следователно, $\cup \mathrm{B} = \mathrm{S}(\alpha) \leq \beta$. Понеже $\beta \in \mathrm{B}$, то $\beta \leq \cup \mathrm{B}$. Така $\beta = \cup \mathrm{B}$, откъдето $\cup \mathrm{B} \in \mathrm{B}$. Тогава $\mathrm{S}(\cup \mathrm{B}) \in \mathrm{B}$ и, следователно, $\mathrm{S}(\cup \mathrm{B}) \leq \cup \mathrm{B}$ – противоречие. Тогава $\mathrm{Limit}(\cup \mathrm{B})$.

Нека $\alpha_0 = \mu\, \alpha[\alpha < \mathrm{S}(\cup \mathrm{B}) \ \& \ \mathrm{Limit}(\alpha)]$, т.е. α_0 е най-малкият граничен ординал.

Нека $\mathrm{x} \in \alpha_0$. Тогава $\neg\mathrm{Limit}(\mathrm{x})$. Ако пък $\mathrm{y} < \mathrm{x}$, то $\mathrm{y} < \alpha_0$, откъдето $\neg\mathrm{Limit}(\mathrm{y})$. Следователно $\mathrm{Nat}(\mathrm{x})$. Обратно, нека $\mathrm{Nat}(\mathrm{x})$. Тогава

$(\forall\, y)[y \leq x \,\&\, \neg \mathrm{Limit}(y)]$, откъдето не е възможно $\alpha_0 \leq x$. Следователно $x \in \alpha_0$. ⊣

Следващото означение е при наличие на аксиомата за безкраиност (Inf).

Означение 3В.4 (ZF)**.** *С* ω *ще означаваме множеството на естествените числа,* $\omega = \{x \mid Nat(x)\}$.

От доказателството на предишната Теорема е видно, че ω е ординал, който е граничен, $\omega = \cup\omega$. Нещо повече, понеже всеки ординал под ω е есвтествено число, т.е. не може да бъде граничен, то ω е и най-малкият граничен ординал (при наличие на (Inf)).

3Г. Трансфинитна индукция

В този раздел, като следствие от това, че всяко множество от ординали има най-малък елемент, ще покажем един индукционен принцип за доказване на свойства от ординали. Тук ще разгледаме три негови форми, които са логически еквивалентни помежду им.

(форма I). Нека $\varphi(\alpha, \overline{u})$ е теоретико-множествено свойство. Тогава:

$$(\exists\, \alpha)[\varphi(\alpha, \overline{u})] \to (\exists\, \alpha')[\varphi(\alpha', \overline{u}) \,\&\, (\forall\, \beta)[\beta < \alpha' \to \neg\varphi(\beta, \overline{u})]].$$

Доказателство. Нека α_0 е такъв, че $\varphi(\alpha_0, \overline{u})$. Да разгледаме множеството

$$A = \{\alpha \mid \alpha < S(\alpha_0) \,\&\, \varphi(\alpha, \overline{u})\}.$$

Ясно е, че A не е празно, понеже $\alpha_0 \in A$. Тогава A има най-малък елемент и нека той е α', $\alpha' = \mu\,\alpha[\alpha \in A]$. В частност, $\alpha' < S(\alpha_0)$ и $\varphi(\alpha', \overline{u})$. Да предположим накрая, че има $\beta < \alpha' < S(\alpha_0)$, за което $\varphi(\beta, \overline{u})$. Но тогава $\beta \in A$ и, следователно, $\alpha' \leq \beta$. Противоречие. Така $\neg\varphi(\beta, \overline{u})$ за всяко $\beta < \alpha'$. ⊣

По-нататък, ако теоретико-множественото свойство $\varphi(\alpha, \overline{u})$ е в сила за поне един ординал α, то най-малкия такъв ординал ще означаваме чрез:

$$\mu\,\alpha[\varphi(\alpha, \overline{u})].$$

(форма II). Нека $\psi(\alpha, \overline{u})$ е теоретико-множествено свойство, за което е в сила, че:

$$(\forall\, \alpha)[(\forall\, \beta < \alpha)[\psi(\beta, \overline{u})] \to \psi(\alpha, \overline{u})].$$

Тогава, $(\forall\, \alpha)[\psi(\alpha, \overline{u})]$.

Доказателство. Да предположим, че α е такъв ординал, че $\neg\psi(\alpha, \overline{u})$. Тогава по **(форма I).** приложена за свойството $\neg\psi$ получаваме, че съществува ординал α' такъв, че $\neg\psi(\alpha', \overline{u})$ и за всеки $\beta < \alpha'$, $\neg\neg\psi(\beta, \overline{u})$, което е еквивлентно на $\psi(\beta, \overline{u})$. Сега, по индукционното свойство на ψ, получаваме че $\psi(\alpha', \overline{u})$. Противоречие. $\dashv$

(форма III). Нека $\varphi(\alpha, \overline{u})$ е теоретико-множествено свойство, за което е в сила, че:

- $\varphi(0, \overline{u})$,
- $(\forall\, \alpha)[\varphi(\alpha, \overline{u}) \to \varphi(\mathrm{S}(\alpha), \overline{u})]$ и,
- $(\forall\, \alpha)[\mathrm{Limit}(\alpha)\ \&\ (\forall\, \beta < \alpha)[\varphi(\beta, \overline{u})] \to \varphi(\alpha, \overline{u})]$.

Тогава, $(\forall\, \alpha)[\varphi(\alpha, \overline{u})]$.

Доказателство. Да предположим, че α е такъв ординал, че $\neg\varphi(\alpha, \overline{u})$. Тогава по **(форма I).** приложена за свойството $\neg\varphi$ получаваме, че съществува ординал α' такъв, че $\neg\varphi(\alpha', \overline{u})$ и за всеки $\beta < \alpha'$, $\neg\neg\varphi(\beta, \overline{u})$, което е еквивлентно на $\varphi(\beta, \overline{u})$. Ако $\alpha' = \mathrm{S}(\beta)$, за някое β, то $\varphi(\beta, \overline{u})$, откъдето $\varphi(\alpha', \overline{u})$. Ако пък $\mathrm{Limit}(\alpha')$, то отново имаме $\varphi(\alpha', \overline{u})$. Противоречие. $\dashv$

3Д. Трансфинитна рекурсия

Аксиомна схема за замяната. *Нека $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ е теоретико-множествено свойство такова, че при набора от параметри $\overline{u}$ е в сила, че:*

$$(\forall\, \mathrm{x})(\exists! \mathrm{y})[\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})].$$

Тогава за всяко множество A *съществува множество* B *такова, че*:

$$(\forall\, \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{B} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \&\ \varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})]].$$

Да забележим, че теоретико-множествените свойства от предпоставката в схемата за замяна, т.е. тези $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$, които (при набора от параметри $\overline{u}$) изпълняват:

$$(\forall\, \mathrm{x})(\exists! \mathrm{y})[\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})],$$

задават съответствие. Именно, на всяко множество x можем да съпоставим единственото множество y, за което $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$. Това съответствие, обаче, не е функция, понеже е дефинирано върху всяко множество. Такива съответствия занапред ще наричаме *определими операции.* Забележете, че не всички функционални съответствия са определими чрез формула, най-малкото поради мощностни съображения.

По-точно, ще казваме, че формулата $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ определя операция (при набора от параметри $\overline{u}$), ако:

$$(\forall\, \mathrm{x})(\exists! \mathrm{y})[\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})].$$

Така например, формулата $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightharpoons (\forall\, \mathrm{a})[\mathrm{a} \in \mathrm{y} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{a} \in \mathrm{z}]]$ задава операцията $\cup \mathrm{x}$, а формулата $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightharpoons (\mathrm{x} = \varnothing \,\&\, \mathrm{y} = \varnothing) \vee (\mathrm{x} \neq \varnothing \,\&\, (\forall\, \mathrm{a})[\mathrm{a} \in \mathrm{y} \leftrightarrow (\forall\, \mathrm{z})[\mathrm{z} \in \mathrm{x} \ \rightarrow\ \mathrm{a} \in \mathrm{z}]])$ – операцията $\cap \mathrm{x}$.

Нека F е операцията определена от φ (при набора от параметри $\overline{u}$). Тогава с $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ ще означаваме единственото y, за което $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$. Въпреки, че операцията F не е множество (т.е. не е обект от нашата вселена), ще си позволим да използваме $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ като означение за $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$. Изобщо, ако ρ е теоретико-множествено свойство, то изразът $\rho(\ldots, \mathrm{F}(\mathrm{x}), \ldots)$ ще бъде съкращение за:

$$(\exists\, \mathrm{y})[\rho(\ldots, \mathrm{y}, \ldots) \,\&\, \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}].$$

При така въведените означения, аксиомната схема за замяна казва, че за всяка определима операция F и всяко множество A съществува множество B такова, че за всяко множество y:

$$\mathrm{y} \in \mathrm{B} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}].$$

От аксиомата за обемност следва и, че това множество B е и единствено. С други думи, за всяка определима операция F и всяко множество A, съвкупността от множества:

$$\{\mathrm{y} \ \mid\ (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}]\}$$

е множество. По-нататък това множество ще наричаме образ на A под действието на операцията F и, за да запазим интуицията изградена от функциите, ще означаваме с F[A], [1].

Нека F отново е операцията, определена от $\varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$. От аксиомната схема за замяната също следва, че върху всяко множество A, операцията F може да бъде представена от функция (при това единствена), т.е. от множество от наредени двойки. По-точно: за всяко множество A, съществува функция f с $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$ такава, че за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x})$.

---

[1] По-формално: $\mathrm{z} = \mathrm{F}[\mathrm{A}]$ е съкращение за

$$(\forall\, \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{z} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}]].$$

Ако ρ е теоретико-множествено свойство, то изразът $\rho(\ldots, \mathrm{F}[\mathrm{A}], \ldots)$ ще бъде съкращение за:

$$(\exists\, \mathrm{z})[\rho(\ldots, \mathrm{z}, \ldots) \,\&\, \mathrm{z} = \mathrm{F}[\mathrm{A}]].$$

Наистина, нека B е множеството, описано в схемата за замяната при A и φ. Тогава функцията

$$\mathrm{f} = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \& \ \mathrm{y} \in \mathrm{B} \ \& \ \varphi(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})\}$$

ще има желаните свойства. По-нататък ще използваме означението $\mathrm{F} \restriction \mathrm{A}$ за тази единствена функция[2]. Да забележим също, че

$$\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \mathrm{A}) = \mathrm{F}[\mathrm{A}].$$

Трансфинитна рекурсия

Теорема 3Д.1. *(Трансфинитна рекурсия) Нека при някой набор от параметри $\overline{u}$ формулата $\varphi(\overline{u}, x, y)$ определя операцията $G(\overline{u}, x)$. Тогава съществува определима операция $F_{\overline{u}}$ такава, че*

$$(\forall\, \alpha)[F_{\overline{u}}(\alpha) = G(\overline{u}, F_{\overline{u}} \restriction \alpha)].$$

При това, $F_{\overline{u}}$ е единствена в следния смисъл:
ако за $i = 1, 2$, $(\forall\, \alpha)[F_i(\alpha) = G(\overline{u}, F_i \restriction \alpha)]$, то $(\forall\, \alpha)[F_1(\alpha) = F_2(\alpha)]$.

Доказателство. I. единственост. Нека операциите F_1 и F_2 са такива, че $(\forall\, \alpha)[\mathrm{F}_1(\alpha) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{F}_1 \restriction \alpha)]$ и $(\forall\, \alpha)[\mathrm{F}_2(\alpha) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{F}_2 \restriction \alpha)]$. Да предположим, че $(\exists\, \alpha)[\mathrm{F}_1(\alpha) \neq \mathrm{F}_2(\alpha)]$ и нека $\alpha_0 = \mu\, \alpha[\mathrm{F}_1(\alpha) \neq \mathrm{F}_2(\alpha)]$. Тогава $(\forall\, \beta < \alpha_0)[\mathrm{F}_1(\beta) = \mathrm{F}_2(\beta)]$ и, следователно, $\mathrm{F}_1 \restriction \alpha_0 = \mathrm{F}_2 \restriction \alpha_0$. Така:

$$\mathrm{F}_1(\alpha_0) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{F}_1 \restriction \alpha_0) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{F}_2 \restriction \alpha_0) = \mathrm{F}_2(\alpha_0).$$

Противоречие.
II. съществуване. Въвеждаме следното понятие за α-*пресмятане*:

$$\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f}) \leftrightharpoons \mathrm{Funct}(\mathrm{f}) \& (\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{S}(\alpha)) \& \\ \& (\forall\, \beta \leq \alpha)[\mathrm{f}(\beta) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{f} \restriction \beta)].$$

1. $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f}) \to (\forall\, \beta < \alpha)[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))]$.

Нека $\beta \leq \alpha$. Тогава $S(\beta) \leq \mathrm{S}(\alpha)$, откъдето $S(\beta) \subseteq \mathrm{S}(\alpha)$. Следователно, $\mathrm{Funct}(\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))$ и $\mathrm{Dom}(\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta)) = \mathrm{S}(\beta)$.

---

[2] По-формално: $\mathrm{z} = \mathrm{F} \restriction \mathrm{A}$ е съкращение за

$$(\forall\, \mathrm{t})[\mathrm{t} \in \mathrm{z} \leftrightarrow (\exists\, \mathrm{x})(\exists\, \mathrm{y})[\mathrm{t} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \ \& \ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \& \ \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}]].$$

Ако ρ е теоретико-множествено свойство, то изразът $\rho(\ldots, \mathrm{F} \restriction \mathrm{A}, \ldots)$ ще бъде съкращение за:

$$(\exists\, \mathrm{z})[\rho(\ldots, \mathrm{z}, \ldots) \ \& \ \mathrm{z} = \mathrm{F} \restriction \mathrm{A}].$$

Нека $\gamma \leq \beta$. В частност, $\gamma \leq \alpha$. Да забележим, че $(\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))(\gamma) = \mathrm{f}(\gamma)$ и $(\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta)) \restriction \gamma = \mathrm{f} \restriction \gamma$. Така получаваме, че:

$$(\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))(\gamma) = \mathrm{f}(\gamma) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{f} \restriction \gamma) = \mathrm{G}(\overline{u}, (\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta)) \restriction \gamma).$$

2. $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f}) \& \ \mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{g}) \to \mathrm{f} = \mathrm{g}$.

Нека $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f}) \& \ \mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{g})$ и да предположим, че $\mathrm{f} \neq \mathrm{g}$. Понеже $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{g}) = \mathrm{S}(\alpha)$, то има ординал $\alpha' \leq \alpha$ такъв, че $\mathrm{f}(\alpha') \neq \mathrm{g}(\alpha')$. Нека $\alpha_0 = \mu\, \alpha[\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{g}(\alpha)]$. В частност, $\mathrm{f}(\alpha_0) \neq \mathrm{g}(\alpha_0)$. Тогава $\alpha_0 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f})$ и така $\alpha_0 \leq \alpha$. Освен това, за всяко $\beta < \alpha_0$, $\mathrm{f}(\beta) = \mathrm{g}(\beta)$. Следователно $\mathrm{f} \restriction \alpha_0 = \mathrm{g} \restriction \alpha_0$. Тогава:

$$\mathrm{f}(\alpha_0) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{f} \restriction \alpha_0) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{g} \restriction \alpha_0) = \mathrm{g}(\alpha_0).$$

Противоречие.

3. $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f}) \ \& \ \mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha', \mathrm{g}) \to \mathrm{f} \subseteq \mathrm{g} \ \vee \ \mathrm{g} \subseteq \mathrm{f}$

Нека $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f})$ и $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha', \mathrm{g})$. Ако $\alpha = \alpha'$, то по 2. $\mathrm{f} = \mathrm{g}$. Нека сега $\alpha < \alpha'$. Тогава $S(\alpha) \leq \alpha'$. Следователно, по 1., $\mathrm{g} \restriction \mathrm{S}(\alpha)$ е α-пресмятане. Но f също е α-пресмятане и по 2. получаваме, че $\mathrm{f} = \mathrm{g} \restriction S(\alpha) \subseteq \mathrm{g}$.

4. $(\forall\, \alpha)(\exists\, \mathrm{f})[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, \mathrm{f})]$

Ще докажем твърдението с трансфинитна индукция по ординалите. За целта, нека α е такъв ординал, че $(\forall\, \beta < \alpha)(\exists\, \mathrm{f})[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{f})]$. Нека $\theta(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ е формулата:

$$\begin{aligned}[\mathrm{ord}(\mathrm{x}) \ \& \ (\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{z})] \ \& \ \mathrm{Comp}(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})] \ \vee \\ \vee \ [\mathrm{ord}(\mathrm{x}) \ \& \ \neg(\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{z})] \ \& \ \mathrm{y} = \varnothing] \ \vee \\ \vee \ [\neg \mathrm{ord}(\mathrm{x}) \ \& \ \mathrm{y} = \varnothing].\end{aligned}$$

Да забележим, че $(\forall\, \mathrm{x})(\exists! \mathrm{y})[\theta(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})]$. Тогава θ е формула на операция и по аксиомната схема за замяна можем да образуваме множеството:

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{y} \ \mid \ (\exists\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \alpha \ \& \ \theta(\overline{u}, \mathrm{x}, \mathrm{y})]\}.$$

В сила са следните свойства на елементите на B:

• Нека $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$. Тогава има $\beta < \alpha$ такова, че $\theta(\overline{u}, \beta, \mathrm{y})$. Но $\mathrm{ord}(\beta)$ и от индукционното предположение имаме, че $(\exists\, \mathrm{z})[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{z})]$. Следователно, $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{y})$. Така:

$$(\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})(\exists\, \beta < \alpha)[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{y})].$$

• От горното свойство получаваме, че $(\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})[\mathrm{Funct}(\mathrm{y})]$. От 3. пък имаме, че $(\forall\, \mathrm{y}_1 \in \mathrm{B})(\forall\, \mathrm{y}_2 \in \mathrm{B})[\mathrm{y}_1 \subseteq \mathrm{y}_2 \ \vee \ \mathrm{y}_2 \subseteq \mathrm{y}_1]$. Следователно:

$$\mathrm{Funct}(\cup \mathrm{B}).$$

• Нека $\beta < \alpha$. Тогава по индукционното предположение има y такова, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, y)$. Но за всяко $\beta < \alpha$, ако $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, y)$, то задължително $y \in B$. Следователно,

$$(\forall\, \beta < \alpha)(\exists! y)[y \in B \;\&\; \mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, y)],$$

като единствеността идва от 2.

Имаме, че $\mathrm{Funct}(\cup B)$ като от горните свойства и факта, че ако $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, y)$, то $\mathrm{Dom}(y) = S(\beta)$, получаваме, че:

$$\mathrm{Dom}(\cup B) = \cup\{\mathrm{Dom}(y) \;\mid\; y \in B\} = \cup\{S(\beta) \;\mid\; \beta < \alpha\} = \alpha.$$

Нека $g = (\cup B) \cup \{\langle \alpha, G(\overline{u}, \cup B)\rangle\}$. Ще покажем, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, g)$. Понеже $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\cup B)$, то $\mathrm{Funct}(g)$. Освен това

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\cup B) \cup \{\alpha\} = S(\alpha).$$

Накрая нека $\beta \leq \alpha$. Ако $\alpha = \beta$, то:

$$g(\alpha) = G(\overline{u}, \cup B) = G(\overline{u}, g \restriction \alpha).$$

Ако пък $\beta < \alpha$, то нека f е такова, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, f)$. От горните свойства следва, че $f \in B$, откъдето $f \subseteq \cup B \subseteq g$. Тогава:

$$g(\beta) = (\cup B)(\beta) = f(\beta) = G(\overline{u}, f \restriction \beta) = G(\overline{u}, g \restriction \beta).$$

Следователно, $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, g)$. Така $(\exists\, f)[\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, f)]$.
5. Да означим с $\chi(\overline{u}, x, y)$ формулата:

$$[\mathrm{ord}(x) \;\&\; (\exists\, f)[\mathrm{Comp}(\overline{u}, x, f) \;\&\; y = f(x)]] \;\vee\; [\neg \mathrm{ord}(x) \;\&\; y = \varnothing].$$

В сила е, че

$$(\forall\, x)(\exists! y)[\chi(\overline{u}, x, y)].$$

Действително, ако $\neg\mathrm{ord}(x)$, то $\chi(\overline{u}, x, \varnothing)$. Ако пък $\mathrm{ord}(x)$, то по 4. има функция f такава, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, x, f)$. Но тогава $x \in \mathrm{Dom}(f)$, откъдето $\chi(\overline{u}, x, f(x))$. Следователно, $(\forall\, x)(\exists\, y)[\chi(\overline{u}, x, y)]$.

Нека $\chi(\overline{u}, x, y_1)$ и $\chi(\overline{u}, x, y_2)$. Ако $\neg\mathrm{ord}(x)$, то $y_1 = y_2 = \varnothing$. Ако пък $\mathrm{ord}(x)$, то нека функциите f_1 и f_2 са такива, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, x, f_1) \;\&\; y_1 = f_1(x)$ и $\mathrm{Comp}(\overline{u}, x, f_2) \;\&\; y_2 = f_2(x)$. Тогава по 2. получаваме, че $f_1 = f_2$, откъдето пак $y_1 = y_2$.

Следователно χ задава операция, която ще означим с F.
6. $(\forall\, \alpha)[F(\alpha) = G(\overline{u}, F \restriction \alpha)]$

Нека $\mathrm{ord}(\alpha)$. Нека функцията f е такава, че $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \alpha, f)$. Тогава $F(\alpha) = f(\alpha)$.

Нека сега $\beta < \alpha$. Тогава $S(\beta) \leq \alpha$ и по 1., $\mathrm{Comp}(\overline{u}, \beta, \mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))$, откъдето $\mathrm{F}(\beta) = (\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\beta))(\beta) = \mathrm{f}(\beta)$. Така $\mathrm{F} \restriction \alpha = \mathrm{f} \restriction \alpha$, откъдето:

$$\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{f} \restriction \alpha) = \mathrm{G}(\overline{u}, \mathrm{F} \restriction \alpha).$$

$\dashv$

От самото доказателство на горната теорема следва, че формулата която определя F може да бъде ефективно получена по формулата φ, определяща операцията G.

В някои от следващите ни конструкции ще бъде необходимо да правим разлика между ординали наследници и гранични ординали. В сила е следният вариант на Теоремата за трансфинитна рекурсия, в която това се взима под внимание.

Теорема 3Д.2. *Нека G_1, G_2 и G_3 са определими операции. Тогава съществува определима операция F такава, че:*

- $F(0) = G_1(\varnothing)$,
- $F(S(\alpha)) = G_2(F(\alpha))$, *за всеки ординал* α,
- $F(\alpha) = G_3(F \restriction \alpha)$, *за всеки граничен ординал* α.

Доказателство. Нека G е операцията, определена от теоретико-множественото свойство $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leftrightharpoons$

- $\mathrm{x} = \varnothing$ и $\mathrm{y} = \mathrm{G}_1(\varnothing)$, или
- $\mathrm{Funct}(\mathrm{x}), \mathrm{Dom}(\mathrm{x}) = \mathrm{S}(\alpha)$ за някое α, и $\mathrm{y} = \mathrm{G}_2(\mathrm{x}(\alpha))$, или
- $\mathrm{Funct}(\mathrm{x}), (\exists\, \alpha)[\mathrm{Limit}(\alpha)\ \&\ \mathrm{Dom}(\mathrm{x}) = \alpha]$ и $\mathrm{y} = \mathrm{G}_3(\mathrm{x})$, или
- x не е нито едно от горните и $\mathrm{y} = \varnothing$.

Нека F е определимата операция такава, че за всеки ординал α, $\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \alpha)$. Тогава:

- $\mathrm{F}(0) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction 0) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \varnothing) = \mathrm{G}(\varnothing) = \mathrm{G}_1(\varnothing)$;
- $\mathrm{F}(\mathrm{S}(\alpha)) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \mathrm{S}(\alpha)) = \mathrm{G}_2((\mathrm{F} \restriction \mathrm{S}(\alpha))(\alpha)) = \mathrm{G}_2(\mathrm{F}(\alpha))$;
- Нека $\mathrm{Limit}(\alpha)$. Тогава: $\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \alpha) = \mathrm{G}_3(\mathrm{F} \restriction \alpha)$.

$\dashv$

Приложения

Ще ни бъде нужна следната помощна лема

Лема 3Д.3. *Нека F е определима операция, която е инективна върху ординалите, т.е.:*

$$(\forall\, \alpha)(\forall\, \beta)[\alpha \neq \beta\ \rightarrow\ F(\alpha) \neq F(\beta)].$$

Тогава $(\forall\, A)(\exists\, \alpha)[F(\alpha) \notin A]$.

Идея: Ако A съдържа $\mathrm{F}(\alpha)$ за всеки ординал α, то $\mathrm{F}^{-1}[\mathrm{A}]$ ще бъде множество, което съдържа всички ординали.

Доказателство. Да предположим, че F е определима операция, а A е такова множество, че за всеки ординал α, $\mathrm{F}(\alpha) \in \mathrm{A}$. Нека $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{A})$ е формулата[3]:

$$[\mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \& \ (\exists\, \alpha)[\mathrm{x} = \mathrm{F}(\alpha)] \ \& \ \mathrm{y} = \mu\, \alpha[\mathrm{x} = \mathrm{F}(\alpha)]] \vee \\ \vee \ [[\mathrm{x} \notin \mathrm{A} \ \vee \ \neg(\exists\, \alpha)[\mathrm{x} = \mathrm{F}(\alpha)]] \ \& \ \mathrm{y} = 0].$$

Не е трудно да се забележи, че $(\forall\, \mathrm{x})(\exists! \mathrm{y})[\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{A})]$. Нека H е операцията, която определя ψ. Забележете, че върху множеството

$$\{\mathrm{x} \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ \& \ (\exists\, \alpha)[\mathrm{x} = \mathrm{F}(\alpha)]\} \subseteq \mathrm{A}$$

операцията H действа като обратна на операцията F.

Понеже H е определима операция, то H[A] е множество. Нека α е произволен ординал и нека $\mathrm{x} = \mathrm{F}(\alpha)$. Тогава $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$. От инективността на F, следва че $\alpha = \mu\, \beta[\mathrm{x} = \mathrm{F}(\beta)]$. Така $\alpha = \mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathrm{H}[\mathrm{A}]$. Тогава H[A] е множество, съдържащо всички ординали. Противоречие. ⊣

Теорема 3Д.4. *Нека $\langle W, \leq \rangle$ е д.н.м. Тогава съществуват единствен ординал α и единствен изоморфизъм $f : \alpha \to W$ между д.н.м. $\langle \alpha, \in \rangle$ и $\langle W, \leq \rangle$.*

Доказателство. (I. единственост.) Нека за $i = 1, 2$, $\mathrm{f}_i : \alpha_i \to \mathrm{W}$ е изоморфизъм между $\langle \alpha_i, \in \rangle$ и $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$. Без ограничение можем да считаме, че $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Нека $\mathrm{h} = \mathrm{f}_1 \circ \mathrm{f}_2^{-1}$. С други думи, за всяко $\alpha \in \alpha_1$, $\mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{f}_2^{-1}(\mathrm{f}_1(\alpha))$. Тогава $\mathrm{h} : \alpha_1 \to \alpha_2$ е изоморфизъм между $\langle \alpha_1, \in \rangle$ и $\langle \alpha_2, \in \rangle$. Но $\langle \alpha_1, \in \rangle$ е начален сегмент на $\langle \alpha_2, \in \rangle$, откъдето $\alpha_1 = \alpha_2$.Тогава h е автоморфизъм на д.н.м $\langle \alpha_1, \in \rangle$ и, следователно, $\mathrm{h} = \mathrm{id}_{\alpha_1}$. Така $\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2$.

(II. съществуване.) Нека $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м. и $\infty \notin \mathrm{W}$. Определяме[4] с рекурсия по ординалите операцията F:

---

[3] ψ може да се сведе до теоретико-множествено свойство, използвайки която и да е формула, определяща F.

[4] Нека G е операцията, която се определя от теоретико-множественото свойство $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{W}, \leq, \infty)$:

- $\mathrm{y} = 0 \ \& \ [(\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ не е д.н.м. $\vee \ \infty \in \mathrm{W} \ \vee \ \neg\mathrm{Funct}(\mathrm{x})]$,
  или
- $\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м. $\& \ \infty \notin \mathrm{W} \ \& \ \mathrm{Funct}(\mathrm{x}) \ \& \ \mathrm{W} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{x}) \neq \varnothing \ \&$
  $\& \ \mathrm{y} = min_{\leq}(\mathrm{W} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{x}))$,
  или
- $((\langle \mathrm{W}, \leq \rangle$ е д.н.м.$) \ \& \ \infty \notin \mathrm{W} \ \& \ \mathrm{Funct}(\mathrm{x}) \ \& \ \mathrm{W} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{x}) = \varnothing \ \& \ \mathrm{y} = \infty$.

Сега F е определимата операция, за която за всеки ординал α, $\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \alpha)$.

$F(\alpha) = min_{\leq}(W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha))$, ако $W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha) \neq \varnothing$; в противен случай, $F(\alpha) = \infty$.

Тогава, ако $\alpha < \beta$ и $F(\beta) \neq \infty$, то $F(\alpha) \neq \infty$ и $F(\alpha) < F(\beta)$. Наистина, ако $\alpha < \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$. Тогава $F \upharpoonright \alpha \subseteq F \upharpoonright \beta$, откъдето $Rng(F \upharpoonright \alpha) \subseteq Rng(F \upharpoonright \beta)$ и, следователно,

$$W \setminus Rng(F \upharpoonright \beta) \subseteq W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha).$$

Понеже $F(\beta) \neq \infty$, то $W \setminus Rng(F \upharpoonright \beta) \neq \varnothing$. Оттук, $W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha) \neq \varnothing$ и така $F(\alpha) \neq \infty$. Освен това:

$$min_{\leq}(W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha)) \leq min_{\leq}(W \setminus Rng(F \upharpoonright \beta)),$$

т.е. $F(\alpha) \leq F(\beta)$.

Тъй като $\alpha \in \beta$, то $F(\alpha) \in Rng(F \upharpoonright \beta)$. От друга страна, $F(\beta) \in W \setminus Rng(F \upharpoonright \beta)$, откъдето $F(\beta) \notin Rng(F \upharpoonright \beta)$. Така $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и, следователно $F(\alpha) < F(\beta)$.

Следователно трябва да има ординал α такъв, че $F(\alpha) = \infty$. Наистина, в противен случай операцията F щеше да бъде инективна върху ординалите като всеки ординал щеше да бъде изобразен в различен елемент на множеството W, което е невъзможно според Лема (3Д.3). Нека α_0 е най-малкият ординал, който се изобразява от F в ∞:

$$\alpha_0 = \mu\, \alpha[F(\alpha) = \infty],$$

т.е. $F(\alpha_0) = \infty$ и $(\forall\, \beta < \alpha_0)[F(\beta) \neq \infty]$.

Ще покажем, че функцията $F \upharpoonright \alpha_0$ е изоморфизъм между $\langle \alpha_0, \in \rangle$ и д.н.м. $\langle W, \leq \rangle$. Действително, $Dom(F \upharpoonright \alpha_0) = \alpha_0$. За всяко $\alpha \in \alpha_0$ имаме, че $(F \upharpoonright \alpha_0)(\alpha) = F(\alpha) \neq \infty$. Следователно,

$$(F \upharpoonright \alpha_0)(\alpha) = F(\alpha) \in W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha) \subseteq W$$

и така $Rng(F \upharpoonright \alpha_0) \subseteq W$. Понеже $F(\alpha_0) = \infty$, то $W \setminus Rng(F \upharpoonright \alpha_0) = \varnothing$, откъдето $Rng(F \upharpoonright \alpha_0) = W$. Така $F \upharpoonright \alpha_0$ е сюрективна.

Накрая нека $\alpha < \beta \in \alpha_0$. Тогава $F(\alpha), F(\beta) \neq \infty$ и

$$(F \upharpoonright \alpha_0)(\alpha) = F(\alpha) < F(\beta) = (F \upharpoonright \alpha_0)(\beta),$$

т.е. $F \upharpoonright \alpha_0$ е инективна и запазва наредбата. Окончателно, $f = F \upharpoonright \alpha_0$ е изоморфизъм между $\langle \alpha_0, \in \rangle$ и д.н.м. $\langle W, \leq \rangle$.

$\dashv$

3E. Ординална аритметика

По-рано дефинирахме $\alpha + 1$ като $\alpha \cup \{\alpha\}$. Доказахме, че $\alpha + 1$ е ординал, т.е. е транзитивно множество, което е добре наредено от релацията $\in$. Като добре наредено множество $\alpha+1$ има начален сегмент α и крайният му сегмент, започващ с α се състои от един единствен елемент – α.

Добавяйки 1 към $\alpha+1$ получаваме ординал с начален сегмент α и краен сегмент, състоящ се от два елемента – α и $\alpha + 1$. Понеже крайният сегмент $\{\alpha, \alpha+1\}$ (с индуцираната наредба от $\alpha+1$) е изоморфен на $2 = \mathrm{S}(1) = 1 + 1$, юе означаваме с $\alpha + 2$ сумата на $\alpha + 1$ и 1.

По-общо, под $\alpha + \beta$ ще имаме предвид ординала получен от α добавяйки β пъти 1. Казано иначе, $\alpha+\beta$ е ординал с начален сегмент α и краен сегмент, започващ с α, изоморфен на β. Това, че такъв ординал съществува следва от наблюдението, че

$$(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$$

е добре наредено от лексикографската наредба. По отношение на нея, $\{0\} \times \alpha$ е начален сегмент изоморфен на α, а пък $\{1\} \times \beta$ е краен сегмент изоморфен на β.

Така изглежда разумно да определим $\alpha+\beta$ като ординала, изоморфен на $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$. За технически удобства ще предпочетем следната рекурсивна дефиниция.

Определение 3E.1 (Ординално събиране)**.** *За всеки ординал α:*

- $\alpha+0=\alpha$;
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$, *за всеки ординал* β;
- $\alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$, *ако* $Limit(\beta)$.

Теорема 3E.2. $ord(\alpha + \beta)$.

Доказателство. (с трансфинитна индукция по β) Нека α е произволен. Понеже $\alpha+0 = \alpha$, то $\mathrm{ord}(\alpha)$. Нека $\mathrm{ord}(\alpha+\beta)$. Тогава $\alpha+(\beta+1) = (\alpha + \beta) + 1 = \mathrm{S}(\alpha + \beta)$, което е ординал. Накрая, нека β е граничен ординал такъв, че $(\forall\gamma)[\gamma < \beta \ \rightarrow\ \mathrm{ord}(\alpha+\gamma)]$. Тогава $\alpha + \beta$ е ординал като обединение на множество от ординали:

$$\alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}.$$

$\dashv$

Теорема 3E.3. $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$.

Доказателство. (с трансфинитна индукция по α) $\alpha + 0 = \alpha$ по определение. Ако $0 + \alpha = \alpha$, то $0 + (\alpha + 1) = (0 + \alpha) + 1 = \alpha + 1$. Ако

$\mathrm{Limit}(\alpha)$ и $(\forall\,\beta)[\beta < \alpha \ \rightarrow\ 0 + \beta = \beta]$, то

$$0 + \alpha = \cup\{0 + \beta \ \mid\ \beta < \alpha\} = \cup\{\beta \ \mid\ \beta < \alpha\} = \alpha.$$

$\dashv$

Теорема 3Е.4. $\alpha < \beta \ \rightarrow\ \gamma + \alpha < \gamma + \beta.$

Доказателство. (с трансфинитна индукция по β) Нека $\alpha < \beta \ \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$ и $\alpha < \beta + 1$. Тогава $\alpha < \beta \ \vee\ \alpha = \beta$. И в двата случая

$$\gamma + \alpha \leq \gamma + \beta < (\gamma + \beta) + 1 = \gamma + (\beta + 1).$$

Нека $\mathrm{Limit}(\beta)$ и $(\forall\,\delta)[[\delta < \beta \ \&\ \alpha < \delta \ \rightarrow\ \gamma + \alpha < \gamma + \delta]]$. Тогава:

$$\gamma + \alpha < \cup\{\gamma + \delta \ \mid\ \delta < \beta\} = \gamma + \beta.$$

$\dashv$

Следствие 3Е.5. $\alpha = \beta \ \leftrightarrow\ \gamma + \alpha = \gamma + \beta.$

Доказателство.

$$\alpha = \beta \rightarrow \gamma{+}\alpha = \gamma{+}\beta;\ \ \alpha < \beta \rightarrow \gamma{+}\alpha < \gamma{+}\beta;\ \ \beta < \alpha \rightarrow \gamma{+}\beta < \gamma{+}\alpha.$$

$\dashv$

Ще ни бъде полезно и следното свойство на точните горни граници на множества от ординали.

Лема 3Е.6. *Нека A и B са множества от ординали. Тогава:*

$$(\forall\,\alpha \in A)(\exists\,\beta \in B)[\alpha \leq \beta] \ \rightarrow\ \cup A \leq \cup B.$$

Доказателство. $\gamma \in \cup \mathrm{A} \rightarrow (\exists\,\alpha)[\gamma \in \alpha \ \&\ \alpha \in \mathrm{A}]$. Но $\alpha \in \mathrm{A} \rightarrow (\exists\,\beta)[\beta \in \mathrm{B} \ \&\ \alpha \leq \beta]$, т.е. $(\exists\,\beta)[\gamma \in \beta \ \&\ \beta \in \mathrm{B}]$. Следователно $\gamma \in \cup \mathrm{B}$, откъдето $\cup \mathrm{A} \leq \cup \mathrm{B}$. $\dashv$

Посоката в горната лема не може да се обърне, както показва следния контра-пример:

$$\cup\omega = \omega = \cup(\omega + 1).$$

Теорема 3Е.7. $\alpha \leq \beta \ \rightarrow\ \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$

Доказателство. (с трансфинитна индукция по γ) $\alpha \leq \beta \ \rightarrow\ \alpha + 0 \leq \beta + 0$. Ако $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, то $\alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1 \leq (\beta + \gamma) + 1 = \beta + (\gamma + 1)$. Ако $\mathrm{Limit}(\gamma)$ и $(\forall\,\delta)[\delta < \gamma \ \rightarrow\ \alpha + \delta \leq \beta + \delta]$, то

$$\alpha + \gamma = \cup\{\alpha + \delta \ \mid\ \delta < \gamma\} \leq \cup\{\beta + \delta \ \mid\ \delta < \gamma\} = \beta + \gamma.$$

$\dashv$

Теорема 3Е.8. $\alpha \leq \beta \rightarrow (\exists!\gamma)[\alpha + \gamma = \beta].$

Доказателство. Понеже $0 \leq \alpha$, по Теореми 3Е.7 и 3Е.3 имаме, че $\alpha + \beta \geq 0 + \beta = \beta$. Следователно съществува най-малък ординал γ такъв, че $\alpha + \gamma \geq \beta$. Ако γ не е граничен, то $\gamma = 0 \ \vee \ (\exists\,\delta)[\gamma = \delta + 1]$. Ако $\gamma = 0$, то $\alpha \geq \beta \ \& \ \alpha \leq \beta$. Следователно $\alpha = \beta$ и $\alpha + \gamma = \beta$. Ако $\gamma = \delta = 1$, то $\delta < \gamma$ и $\alpha + \delta < \beta$. Тогава $\alpha + \delta + 1 \leq \beta$, т.е. $\alpha + \gamma \leq \beta$. Но $\alpha + \gamma \geq \beta$; следователно $\alpha + \gamma = \beta$. Ако $\mathrm{Limit}(\gamma)$, то $(\forall\,\delta)[\delta < \gamma \rightarrow \alpha + \delta < \beta]$. Следователно $\alpha + \gamma = \cup\{\alpha + \delta \mid \delta < \beta\} \leq \beta$. Отново понеже $\alpha + \gamma \geq \beta$ получаваме, че $\alpha + \gamma = \beta$.

От Следствие 3Е.5 имаме, че ако $\alpha + \gamma = \beta$ и $\alpha + \delta = \beta$, то $\gamma = \delta$. $\dashv$

3Ж. Кардинални числа

Ще разгледаме един клас от ординали, които могат да бъдат разгледани като канонични представители на мощностите на добре наредимите множества. Изрично отбелязваме, че всички следващи доказателства са в $\mathtt{ZF}$ и не използват Аксиомата за избора.

3Ж.1. Операция на Hartogs. Както ще проверим по-нататък, в $\mathtt{ZF}$ принципа, че всеки две множества са сравними по мощност (закон за трихотомия, **TL**) влече Аксиомата за избора. Всъщност, това е следствие на следната теорема.

Теорема 3Ж.1 (Hartogs)**.** *За всяко множество A съществува ординал α, който не може да бъде вложен инективно в A:*

$$(\forall\, A)(\exists\, \alpha)[\overline{\overline{\alpha}} \not\leq \overline{\overline{A}}].$$

Доказателство. [5] Да припомним, че за всяко д.н.м. $\langle \mathrm{W}, \mathrm{R}\rangle$ съществува единствен ординал α такъв, че $\langle \alpha, \leq\rangle \cong \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}\rangle$. Да означим с X множеството на всички д.н.м. с носител някое подмножество на A:

$$\mathrm{X} = \{\langle \mathrm{W}, \mathrm{R}\rangle \mid \mathrm{WOSet}(\langle \mathrm{W}, \mathrm{R}\rangle) \ \& \ \mathrm{W} \subseteq \mathrm{A}\}.$$

Тогава, според аксиомната схема за замяната, съществува множество H, чиито елементи са точно ординалите изоморфни на някой елемент на X:

$$\mathrm{H} = \{\alpha \mid (\exists\, \mathrm{x} \in \mathrm{X})[\langle \alpha, \leq\rangle \cong \mathrm{x}]\}.$$

[5]Разбира се, ако използваме **AC** горната теорема става тривиална: при дадено множество A, според теоремата на Cantor $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ не може да се вложи инективно в A. Сега от **AC** съществува ординал α такъв, че между него и $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ има биективно съответствие. Тогава α не може да се вложи инективно в A.

Ще покажем, че H съдържа всеки ординал, равномощен с подмножество на A. Наистина, нека α е такъв ординал. Нека $f : \alpha \to A$ е инективно изображение, свидетелстващо за това. Да означим $W = \mathrm{Rng}(f)$ и $R = \{\langle f(\beta), f(\gamma)\rangle \mid \beta \leq \gamma \in \alpha\}$. Тогава $R \subseteq W \times W$ е д.н. в W и $\langle W, R\rangle \cong \langle \alpha, \leq\rangle$. Следователно, $\alpha \in H$.

Но H е множество, следователно има ординал α_0 такъв, че $\alpha_0 \notin H$. В частност, α_0 не е инективно вложим в A. $\dashv$

По-нататък с $\mathcal{H}(A)$ ще бележим най-малкия ординал, който не е инективно вложим в A,

$$\mathcal{H}(A) = \mu\,\alpha[\overline{\overline{\alpha}} \not\leq \overline{\overline{A}}],$$

и ще наричаме *операция на Hartogs*.

От определението на операцията $\mathcal{H}$ непосредствено следва, че за всяко множество A, $\mathcal{H}(A)$ е ординал, който не може да бъде инективно вложен в A: $\mathrm{ord}(\mathcal{H}(A))$ и $\overline{\overline{\mathcal{H}(A)}} \not\leq \overline{\overline{A}}$. Без наличието на Аксиомата за избора не следва, че всяко множество A е инективно вложимо в $\mathcal{H}(A)$.

Нещата, обаче, се опростяват що се отнася до ординали. Нека α е произволен ординал. Тогава $\overline{\overline{\mathcal{H}(\alpha)}} \not\leq \overline{\overline{\alpha}}$. Следователно $\mathcal{H}(\alpha) \not\leq \alpha$ и по трихотомията на ординалите, $\alpha < \mathcal{H}(\alpha)$. Така $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\mathcal{H}(\alpha)}}$. В частност имаме:

Лема 3Ж.2. *За всеки ординал α съществува ординал β такъв, че:*

$$\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}.$$

Директно от определението на операцията на Hartogs, получаваме и следните свойства:

- $\alpha < \beta < \mathcal{H}(\alpha) \to \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\beta}}$;
- $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}} \to \mathcal{H}(\alpha) \leq \beta$;
- $\beta < \mathcal{H}(A) \to \overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}}$.

Да отбележим, че според Теоремата на Cantor, за всяко множество A, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$. Обаче без наличието на **AC**, не можем да твърдим, че $\mathcal{H}(A)$ и $\mathcal{P}(A)$ са сравними по мощност. Следващата лема дава горна граница за мощността на $\mathcal{H}(A)$ в термините на степенното множество на A. За облекчение на изложението въвеждаме и означенията: $\mathcal{P}^2(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $\mathcal{P}^3(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$ и $\mathcal{P}^4(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))))$.

Лема 3Ж.3. *За всяко множество A, $\overline{\overline{\mathcal{H}(A)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}^4(A)}}$.*

Доказателство. Да означим за краткост $\beta = \mathcal{H}(A)$. Тогава:

$$(\forall\, \alpha < \beta)(\exists\, R)[R \subseteq A \times A \ \&\ \langle \mathrm{fld}(R), R\rangle \cong \langle \alpha, \leq\rangle].$$

Нека за всяко $\alpha < \beta$, $f(\alpha) = \{R \mid R \subseteq A \times A \ \&\ \langle \mathrm{fld}(R), R\rangle \cong \langle \alpha, \leq\rangle\}$. Тогава f е инективна функция с $\mathrm{Dom}(f) = \beta$.

Нека $R \in f(\alpha)$. Тогава $R \subseteq A \times A$, откъдето $R \in \mathcal{P}(A \times A)$. Следователно, $f(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$, т.е. $f(\alpha) \in \mathcal{P}^2(A \times A)$. Но $A \times A \subseteq \mathcal{P}^2(A)$, откъдето $\mathcal{P}^2(A \times A) \subseteq \mathcal{P}^4(A)$. Така $f(\alpha) \in \mathcal{P}^4(A)$ и, следователно, $\mathrm{Rng}(f) \subseteq \mathcal{P}^4(A)$.

Понеже f е инективна, то $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\mathrm{Dom}(f)}} = \overline{\overline{\mathrm{Rng}(f)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}^4(A)}}$. ⊣

3Ж.2. Кардинали. Както отбелязахме по-горе, за всяко множество A, ординалът $\mathcal{H}(A)$ не е равномощен с нито един ординал, който е по-малък от него. Такива ординали ще бъдат от специален интерес за нас. Забележете, че ако $\beta < \alpha$, то $\overline{\overline{\beta}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$ – идентитетът id_β е инективно влагане на β в α. В този случай това, че α и β не са равномощни е еквивалентно на $\overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}}$.

Определение 3Ж.4. *Ще казваме, че ординалът α е кардинал, ако не е равномощен с нито един ординал по-малък от него,*

$$\mathit{card}(\alpha) \leftrightarrow \mathit{ord}(\alpha)\ \&\ (\forall\, \beta < \alpha)[\overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}}].$$

Така за всяко A, $\mathrm{card}(\mathcal{H}(A))$. Наистина, да допуснем обратното и нека $\beta < \mathcal{H}(A)$ е такова, че $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}}$. От дефиницията на $\mathcal{H}(A)$ следва, че β е инективно вложимо в A. Но тогава, като равномощно с него, и $\mathcal{H}(A)$ е инективно вложимо в A. Противоречие.

За разлика от ординалите, където е възможно да има равномощни, но различни помежду им ординали, при кардиналите е в сила, че ако два са равномощни, то те са и непременно равни.

Твърдение 3Ж.5. *Нека κ и λ са кардинали. Тогава:*

(1) $\overline{\overline{\kappa}} < \overline{\overline{\lambda}} \ \leftrightarrow\ \kappa < \lambda$;
(2) $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}} \ \leftrightarrow\ \kappa \leq \lambda$;
(3) $\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\lambda}} \ \leftrightarrow\ \kappa = \lambda$.

Доказателство. (1) Нека $\kappa < \lambda$. Тогава $\kappa \subseteq \lambda$, откъдето $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$. Понеже $\mathrm{card}(\lambda)$, то λ не е равномощен с никой по-малък ординал; в частност не е равномощен с κ: $\neg(\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\lambda}})$. следователно $\overline{\overline{\kappa}} < \overline{\overline{\lambda}}$.

Нека сега $\overline{\overline{\kappa}} < \overline{\overline{\lambda}}$ и да допуснем, че $\neg(\kappa < \lambda)$. Тогава $\lambda \leq \kappa$, откъдето $\lambda \subseteq \kappa$ и така $\overline{\overline{\lambda}} \leq \overline{\overline{\kappa}}$. Оттук, $\neg(\overline{\overline{\kappa}} < \overline{\overline{\lambda}})$, което води до противоречие. Следователно $\kappa < \lambda$.

(2) Ако $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa \subseteq \lambda$; оттук директно получаваме, че $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$.

Нека сега $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$ и да предположим, че $\neg(\kappa \leq \lambda)$. Понеже κ и λ са ординали, то $\lambda < \kappa$. Тогава по (2), $\overline{\overline{\lambda}} < \overline{\overline{\kappa}}$, което противоречи с $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$; следователно, $\kappa \leq \lambda$.

(3) В сила е еквивалентността:

$$\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\lambda}} \;\leftrightarrow\; (\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}} \;\&\; \overline{\overline{\lambda}} \leq \overline{\overline{\kappa}}) \;\leftrightarrow\; (\kappa \leq \lambda \;\&\; \lambda \leq \kappa) \;\leftrightarrow\; \kappa = \lambda.$$

$\dashv$

Както видяхме по-рано, обединението на множество от ординали е ординал. Подобно свойство е в сила и за кардиналите.

Лема 3Ж.6. *Обединението на множество от кардинали е кардинал,*

$$(\forall\, x)[x \in A \to card(x)] \to card(\cup A).$$

Доказателство. Понеже всеки кардинал е ординал, то $\mathrm{ord}(\cup \mathrm{A})$. Нека $\alpha < \cup \mathrm{A}$. Тогава има $\kappa \in \mathrm{A}$ такова, че $\alpha \in \kappa$. Но $\mathrm{card}(\kappa)$, откъдето $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\kappa}}$. Понеже $\kappa \leq \cup \mathrm{A}$, то $\overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\cup \mathrm{A}}}$. Така $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\cup \mathrm{A}}}$ и, следователно, $\cup \mathrm{A}$ е кардинал. $\dashv$

Следователно, ако A е множество от кардинали, то $\cup \mathrm{A}$ е най-малкият кардинал, който е по-голям или равен на всеки елемент на A. Оттук лесно следва, че кардиналите не образуват множество.

Лема 3Ж.7. $\neg(\exists\, A)(\forall\, x)[card(x) \to x \in A]$.

Доказателство. Да допуснем, че A е такова множество. От аксиомната схема за отделянето следва, че съществува множество, чиито елементи са точно кардиналите $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{card}(\mathrm{x})\} \subseteq \mathrm{A}$. Тогава $\mathrm{card}(\cup \mathrm{B})$ и за всеки кардинал $\kappa \in \mathrm{A}$, $\kappa \leq \cup \mathrm{B}$. Тогава $\mathcal{H}(\cup \mathrm{B})$ е кардинал строго по-голям от всеки кардинал:

$$\kappa \leq \cup \mathrm{B} < \mathcal{H}(\cup \mathrm{B}).$$

Противоречие. $\dashv$

Да припомним, че естествено число наричаме такъв неграничен ординал, който не е по-голям от никой гранчиен ординал:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{x}) \leftrightharpoons \mathrm{ord}(\mathrm{x}) \;\&\; (\forall\, \beta \leq \mathrm{x})[\neg \mathrm{Limit}(\beta)].$$

С ω пък означихме първият граничен ординал, $\omega = \mu\,\alpha[\mathrm{Limit}(\alpha)]$ като за всяко α имаме:

$$\mathrm{Nat}(\alpha) \leftrightarrow \alpha \in \omega.$$

Оказва се, че всяко естествено число, както и множеството от всички естествени числа са кардинали.

Лема 3Ж.8. *$(\forall\,\alpha)[Nat(\alpha) \to card(\alpha)]$.*

Доказателство. Да допуснем противното и нека α е най-малкото естествено число, което не е кардинал. В частност, всяко $\beta < \alpha$ е кардинал. Понеже α не е кардинал, то $\alpha \neq 0$. Освен това α не е граничен ординал. Нека тогава $\alpha = \mathrm{S}(\beta)$. Понеже $\mathrm{card}(\beta)$, то $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\mathrm{S}(\beta)}}$.

Не е трудно да се забележи, че $\beta \neq 0$, откъдето $\beta = \mathrm{S}(\gamma)$, за някое $\gamma < \omega$. Нека $\mathrm{f} : \mathrm{S}(\mathrm{S}(\gamma)) \to \mathrm{S}(\gamma)$ е биекция между α и β. Ще стигнем до противоречие, построявайки биекция между β и γ, като по този начин ще покажем, че β е естествено число по-малко от α, което не е кардинал.

Наистина, ако $\mathrm{f}(\mathrm{S}(\gamma)) = \gamma$, то изображението $\mathrm{f} \restriction \mathrm{S}(\gamma)$ е биекция.

Иначе, нека $\mathrm{f}(\mathrm{S}(\gamma)) = \eta$ и $\gamma = \mathrm{f}(\zeta)$ за някои $\eta < \gamma$ и $\zeta \leq \gamma$. Определяме g като: $\mathrm{g}(\delta) = \mathrm{f}(\delta)$ за $\delta \neq \zeta$ и $\mathrm{g}(\zeta) = \eta$. Така $\mathrm{g} : \mathrm{S}(\gamma) \to \gamma$ е биекция. $\dashv$

Следствие 3Ж.9. *$card(\omega)$.*

Доказателство. Понеже $(\forall\,\mathrm{x})[\mathrm{x} \in \omega \to \mathrm{card}(\mathrm{x})]$, то $\mathrm{card}(\cup\omega)$. Но $\mathrm{Limit}(\omega)$, откъдето $\omega = \cup\omega$ е кардинал. $\dashv$

Всяко едно естествено число е кардинал, който е ординал наследник или 0. Оказва се, че всички останали кардинали са гранични ординали.

Лема 3Ж.10. *$card(\kappa)$ & $\omega \leq \kappa \to Limit(\kappa)$.*

Доказателство. В случая, когато $\kappa = \omega$ твърдението е очевидно. Нека $\kappa > \omega$ и да предположим, че $\kappa = \mathrm{S}(\delta)$ е ординал наследник. Определяме изображението $\mathrm{f} : \mathrm{S}(\delta) \to \delta$ чрез: $\mathrm{f}(\delta) = 0$; за всяко $\alpha < \omega$, $\mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{S}(\alpha)$; и за всяко $\omega \leq \xi < \delta$, $\mathrm{f}(\xi) = \xi$. Тогава f е биекция между κ и δ, което противоречи с кардиналността на κ. $\dashv$

Директно следствие от горната лема е, че несъществува множество, което съдържа всички гранични ординали:

$$\neg(\exists\,\mathrm{A})(\forall\,\alpha)[\mathrm{Limit}(\alpha) \to \alpha \in \mathrm{A}],$$

както и, че над всеки ординал има граничен ординал:

$$(\forall\,\alpha)(\exists\,\beta)[\alpha < \beta \ \&\ \mathrm{Limit}(\beta)].$$

По-нататък, ако κ е кардинал, с κ^+ ще бележим най-малкия кардинал по-голям от κ, т.е. $\kappa^+ = \mathcal{H}(\kappa)$. Ако κ е кардинал такъв, че $\kappa = \lambda^+$ за някой кардинал λ, то ще казваме, че κ е (кардинал) наследник. В противен случай, ако $\kappa \neq 0$, то ще казваме, че κ е граничен кардинал.

Забележете, че всяко естествено число без 0 е едновременно ординал наследник и кардинал наследник. С предишното твърдение пък показахме, че всеки кардинал, който не е естествено число, е граничен ординал. Не е трудно да се види, че измежду безкрайните кардинали има както кардинали наследници, така и гранични кардинали.

3Ж.3. Операцията $\aleph$. С рекурсия по ординалите определяме следната операция $\aleph$:

- $\aleph(0) = \omega$,
- $\aleph(\mathrm{S}(\alpha)) = \mathcal{H}(\aleph(\alpha)) = \aleph(\alpha)^+$, за всеки ординал α,
- $\aleph(\alpha) = \sup(\mathrm{Rng}(\aleph \restriction \alpha)) = \cup\{\aleph(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ за всеки граничен ординал α.

Занапред вместо $\aleph(\alpha)$ ще пишем $\aleph_\alpha$. Да забележим, че за всяко α, $\aleph_\alpha$ е ординал. С помощта на трансфинитна индукция по ординалите лесно се показват следните свойства:
1. за всяко α, $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

Действително, при $\alpha = 0$ твърдението е очевидно. Да предположим, че $\alpha = \mathrm{S}(\beta)$ и $\beta \leq \aleph_\beta$. Тогава $\mathrm{S}(\beta) \leq \mathrm{S}(\aleph_\beta) \leq \aleph_\beta^+ = \aleph_\alpha$. Накрая нека α е граничен и за всяко $\beta < \alpha$, $\beta \leq \aleph_\beta$. Тогава:

$$\alpha = \cup\{\beta \mid \beta < \alpha\} \leq \cup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\} = \aleph_\alpha.$$

Длъжни сме да отбележим, че макар операцията $\aleph$ да изглежда "много бързо растяща", то тя има неподвижни точки, т.е. има такива ординали α, че $\aleph_\alpha = \alpha$. Нещо повече, операцията има произволно големи неподвижни точки:

$$(\forall\,\beta)(\exists\,\alpha)[\beta < \alpha \ \&\ \aleph_\alpha = \alpha].$$

2. $\aleph_\alpha$ е строго монотонна операция, т.е за всеки α и β,

$$\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta.$$

При $\beta = 0$ твърдението е тривиално. Нека $\beta = \mathrm{S}(\gamma)$ и твърдението е вярно за γ. Нека $\alpha < \beta$ е произволно. Тогава $\alpha \leq \gamma$ и по индукционното предположение $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma < \aleph_\gamma^+ = \aleph_\beta$. Накрая нека β е граничен

и твърдението е вярно за всеки по-малък от него ординал. Нека α е произволен. Тогава $\alpha < S(\alpha) < \beta$, откъдето по индукционното предположение, $\aleph_\alpha < \aleph_{S(\alpha)}$. Освен това, $\aleph_{S(\alpha)} \leq \cup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \beta\} = \aleph_\beta$. Следователно, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
3. всеки кардинал е ограничен строго от някое $\aleph_\alpha$:

$$(\forall\,\kappa)(\exists\,\alpha)[\mathrm{card}(\kappa) \to \kappa < \aleph_\alpha].$$

Наистина, съгласно 1., $\kappa \leq \aleph_\kappa < \aleph_\kappa^+ = \aleph_{S(\kappa)}$.
4. за всяко α, $\aleph_\alpha$ е кардинал по-голям или равен на ω. В сила е и обратното, т.е. че всяко безкрайно кардинално число е равно на $\aleph_\alpha$ за някое α:

$$(\forall\,\kappa)(\exists\,\alpha)[\mathrm{card}(\kappa)\ \&\ \omega \leq \kappa \to \kappa = \aleph_\alpha].$$

За да докажем това твърдение, да забележим, че съгласно 3., е достатъчно да покажем, че:

$$(\forall\,\alpha)(\forall\,\kappa)[\mathrm{card}(\kappa)\ \&\ \omega \leq \kappa\ \&\ \kappa < \aleph_\alpha \to (\exists\,\gamma < \alpha)[\kappa = \aleph_\gamma]].$$

Ще докажем твърдението с трансфинитна индукция по α. Нека първо $\alpha = S(\beta)$ и твърдението е вярно за β. Тогава $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$. Нека $\omega \leq \kappa < \aleph_\alpha$. Следователно $\kappa \leq \aleph_\beta$. Ако $\kappa = \aleph_\beta$, то търсеното γ е самото β. Ако пък $\kappa < \aleph_\beta$, то по индукционното предположение има $\gamma < \beta < \alpha$ такова, че $\kappa = \aleph_\gamma$.

Накрая, нека α е граничен ординал и твърдението е вярно за всеки ординал по-малък от него. Нека $\omega \leq \kappa < \aleph_\alpha$. Тогава съществува $\beta < \alpha$ такова, че $\kappa < \aleph_\beta$. По индукционното предположение има $\gamma < \beta < \alpha$ такова, че $\kappa = \aleph_\gamma$.
5. за всяко α, $\aleph_\alpha$ е кардинал наследник точно тогава, когато α е ординал наследник.

($\leftarrow$) Нека α е ординал наследник като $\alpha = S(\beta)$ за някое β. Тогава $\mathrm{card}(\aleph_\beta)$ и $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$. Следователно, $\aleph_\alpha$ е кардинал наследник.

($\rightarrow$) Нека $\aleph_\alpha$ е кардинал наследник като κ е такъв кардинал, че $\aleph_\alpha = \kappa^+$. Тогава $\alpha \neq 0$. Да допуснем, че α не е ординал наследник. Следователно, $\mathrm{Limit}(\alpha)$. Понеже $\omega \leq \kappa < \aleph_\alpha$, то по 4. съществува такъв ординал $\beta < \alpha$, че $\kappa = \aleph_\beta$. Поради граничността на α, получаваме че:

$$\kappa = \aleph_\beta < \kappa^+ = \aleph_{S(\beta)} < \aleph_\alpha = \kappa^+.$$

Противоречие.
6. за всяко множество от ординали A, $\aleph_{\cup A} = \cup\{\aleph_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Нека първо $\beta \in \aleph_{\cup A}$. Ако $\beta < \omega$, то $\beta \in \aleph_\alpha$ за всеки ординал $\alpha \in A$. В случая, когато $\omega \leq \beta$, нека γ е такъв, че $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\aleph_\gamma}}$. Тогава

$\aleph_\gamma \leq \beta < \aleph_{\cup A}$, откъдето $\gamma < \cup A$. Нека $\alpha \in A$ е такъв, че $\gamma \in \alpha$. Тогава $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$. Оттук $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\aleph_\gamma}} < \overline{\overline{\aleph_\alpha}}$ и, следователно, $\beta < \aleph_\alpha$. Така, независимо от това дали β е краен или безкраен ординал получаваме, че $\beta \in \cup\{\aleph_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Нека сега $\beta \in \cup\{\aleph_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и α е свидетел за това. Така $\alpha \in A$ и $\beta \in \aleph_\alpha$. Тогава $\mathrm{ord}(\cup A)$ и $\alpha \leq \cup A$. Следователно $\beta \in \aleph_\alpha \leq \aleph_{\cup A}$.

Неподвижни точки. Както отбелязахме малко по-рано, операцията $\aleph$ има неподвижни точки, т.е. такива ординали α, че:

$$\aleph_\alpha = \alpha.$$

За да докажем това, нека разгледаме следната операция G, определена с трансфинитна рекурсия по опрдиналите:

- $G(0) = \aleph_0$;
- $G(S(\alpha)) = \aleph_{G(\alpha)}$, за всеки ординал α;
- $G(\alpha) = \cup\{G(\beta) \mid \beta < \alpha\}$, за всеки граничен ординал α.

Ще покажем, че $G(\omega)$ е най-малката неподвижна точка на операцията $\aleph$. Наистина, имаме:

$$\aleph_{G(\omega)} = \aleph_{\cup\{G(\beta) \mid \beta<\omega\}} = \cup\{\aleph_{G(\beta)} \mid \beta < \omega\} =$$
$$= \cup\{G(S(\beta)) \mid \beta < \omega\} = \cup\{G(\beta) \mid \beta < \omega\} = G(\omega),$$

т.е. $G(\omega)$ е неподвижна точка за операцията $\aleph$.

Нека сега η е произволна неподвижна точка за $\aleph$, т.е. $\aleph_\eta = \eta$. Тогава $G(0) = \aleph_0 \leq \aleph_\eta = \eta$. Освен това, ако ординалът α е такъв, че $G(\alpha) \leq \eta$, то

$$G(S(\alpha)) = \aleph_{G(\alpha)} \leq \aleph_\eta = \eta.$$

Следователно, за всяко $\alpha < \omega$ имаме, че $G(\alpha) \leq \eta$, откъдето

$$G(\omega) = \cup\{G(\alpha) \mid \alpha < \omega\} \leq \eta.$$

Така $G(\omega)$ е най-малката от неподвижните точки на операцията $\aleph$.

Упражнение 3Ж.11. *Покажете, че* $Limit(G(\omega))$.

Упражнение 3Ж.12. *Покажете, че операцията G не е строго монотонна, т.е. съществуват ординали $\alpha < \beta$ такива, че $G(\alpha) = G(\beta)$.*

Упражнение 3Ж.13. *Покажете, че операцията $\aleph$ има произволно големи неподвижни точки:*

$$(\forall\,\beta)(\exists\,\alpha)[\beta < \alpha \;\&\; \aleph_\alpha = \alpha].$$

3З. Комулативна йерархия

Глава 4

Аксиома за избора

4А. Аксиома за избора. Еквивалентни форми

(**AM**) Нека B е множество, чиито елементи са непразни и два по два непресичащи се. Тогава съществува множество C, което съдържа точно по един елемент от всеки елемент на B.

$$(\forall \mathrm{B})[[(\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B} \to \mathrm{x} \neq \varnothing] \ \& \\ \& \ (\forall \mathrm{x})(\forall \mathrm{y})[\mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \& \ \mathrm{y} \in \mathrm{B} \ \& \ \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \ \to \ \mathrm{x} \cap \mathrm{y} = \varnothing]] \ \to \\ \to \ (\exists \mathrm{C})(\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{B} \ \to \ (\exists \mathrm{a})[\mathrm{C} \cap \mathrm{x} = \{\mathrm{a}\}]]].$$

(**AC**) За всяко множество A съществува функция на избора[1] за A.

$$(\forall \mathrm{A})(\exists \mathrm{f})[(\mathrm{f} : \mathcal{P}(\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\} \to \mathrm{A}) \ \& \ (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f}))[\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}]].$$

(**AC1**) Нека A е множество от непразни множества. Тогава съществува функция f такава, че: $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$ и за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}$.
(**Rel**) Всяка релация може да бъде ограничена до функция със същата дефиниционна област,

$$(\forall \mathrm{R})[\mathrm{Rel}(\mathrm{R}) \to (\exists \mathrm{f})[\mathrm{Funct}(\mathrm{f}) \ \& \ \mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \ \& \ \mathrm{f} \subseteq \mathrm{R}]].$$

(**Inj**) Всяка функция може да бъде ограничена до инективна функция със същата област от стойностите,

$$(\forall \mathrm{f})[\mathrm{Funct}(\mathrm{f}) \to (\exists \mathrm{g})[\mathrm{g} \subseteq \mathrm{f} \ \& \ \mathrm{Rng}(\mathrm{g}) = \mathrm{Rng}(\mathrm{f}) \ \& \ \mathrm{Inj}(\mathrm{g})]].$$

(**ZL**) Нека $\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$ е ч.н.м., в което всяка верига има горна граница. Тогава в $\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$ има поне един максимален елемент.
(**WOP**) Всяко множество може да бъде добре наредено.

$$(\forall \mathrm{A})(\exists \mathrm{R})[\mathrm{POSet}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) \ \& \ (\forall \mathrm{u})[\mathrm{u} \neq \varnothing \ \& \ \mathrm{u} \subseteq \mathrm{A} \to \\ (\exists \mathrm{y})[\mathrm{y} \in \mathrm{u} \ \& \ (\forall \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{u} \to \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle \in \mathrm{R}]]]].$$

---

[1] f е функция на избора за A, ако $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathcal{P}(\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\}$ и за всяко непразно подмножество x на A, $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}$.

(**TL**) Всеки две множества са сравними по мощност:

$$(\forall\, \mathrm{a})(\forall\, \mathrm{b})[\overline{\overline{\mathrm{a}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{b}}} \ \vee \ \overline{\overline{\mathrm{b}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{a}}}].$$

Еквивалентността на Аксиомата за избора и Закона за Трихотомия е доказана от Hartogs през 1915.

4Б. Аксиома за мултипликативност

Теорема 4Б.1. AC $\leftrightarrow$ AC1

Доказателство. ($\rightarrow$) Нека A е множество от непразни множества. Нека f е функция на избора за $\cup$A, т.е.:

$$\mathrm{Dom(f)} = \mathcal{P}(\cup \mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\} \text{ и } (\forall\, \mathrm{x})[\mathrm{x} \neq \varnothing \ \& \ \mathrm{x} \subseteq \cup \mathrm{A} \ \rightarrow \ \mathrm{f(x)} \in \mathrm{x}].$$

Да забележим, че ако $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, то $\mathrm{x} \subseteq \cup\mathrm{A}$. Понеже елементите на A са непразни множества, то $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{P}(\cup\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\} = \mathrm{Dom(f)}$. Нека $\mathrm{g} = \mathrm{f} \restriction \mathrm{A}$. Тогава $\mathrm{Dom(g)} = \mathrm{A}$, и за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ е в сила, че:

$$\mathrm{g(x)} = (\mathrm{f} \restriction \mathrm{A})(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} \in \mathrm{x}.$$

($\leftarrow$) Нека A е произволно множество. Тогава $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\}$ е множество от непразни множества. Нека f е такава функция, че:

$$\mathrm{Dom(f)} = \mathcal{P}(\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\} \text{ и за всяко } \mathrm{x} \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \setminus \{\varnothing\},\ \mathrm{f(x)} \in \mathrm{x}.$$

Но тогава f е функция на избора за A. $\dashv$

Теорема 4Б.2. AC1 $\leftrightarrow$ AM

Доказателство. ($\rightarrow$) Нека B е множество такова, че $(\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{B})[\mathrm{x} \neq \varnothing]$ и $(\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{B})(\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{B})[\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \rightarrow \mathrm{x} \cap \mathrm{y} = \varnothing]$. Нека f е функция на избора за $\cup$B, т.е. $\mathrm{f} : \mathcal{P}(\cup\mathrm{B}) \setminus \{\varnothing\} \rightarrow \cup\mathrm{B}$ и за всяко непразно $\mathrm{u} \subseteq \cup B$, $\mathrm{f(u)} \in \mathrm{u}$.

Да забележим, че $\varnothing \notin \mathrm{B}$, откъдето $\mathrm{B} \subseteq \mathcal{P}(\cup\mathrm{B}) \setminus \{\varnothing\}$. Тогава множеството $\mathrm{C} = \mathrm{Rng}(\mathrm{f} \restriction \mathrm{B})$ е селектор за B. Действително, нека $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$. Тогава x е непразно и $\mathrm{x} \subseteq \cup\mathrm{B}$, т.е. $\mathrm{x} \in \mathcal{P}(\cup\mathrm{B}) \setminus \{\varnothing\}$. Така $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{x}$ и понеже $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{C}$, то $\mathrm{C} \cap \mathrm{x} \neq \varnothing$.

Остава да забележим, че $\mathrm{C} \cap \mathrm{x}$ е синглетон. За целта, нека $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathrm{C} \cap \mathrm{x}$. Понеже $\mathrm{C} = \mathrm{Rng}(\mathrm{f} \restriction \mathrm{B})$, то съществуват $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{B}$ такива, че $\mathrm{y}_1 = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1) \in \mathrm{x}_1$ и $\mathrm{y}_2 = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) \in \mathrm{x}_2$. Тогава $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) \in \mathrm{x} \cap \mathrm{x}_1$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}_2) \in \mathrm{x} \cap \mathrm{x}_2$. Оттук $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x} = \mathrm{x}_2$ и, следователно, $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$.

($\leftarrow$) Нека A е множество. Нека

$$\mathrm{B} = \{\{\mathrm{x}\} \times \mathrm{x} \ \mid \ \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}.$$

Да забележим, че B е множество от непразни, две по две непресичащи се множества (ако $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle \in (\{\mathrm{x}\} \times \mathrm{x}) \cap (\{\mathrm{x}'\} \times \mathrm{x}')$, то $\mathrm{x} = \mathrm{a} = \mathrm{x}'$). Нека

C е множество селектор за B, т.е. сечението му с всеки елемент на B е синглетон:

$$\mathrm{C} \cap \{\mathrm{x}\} \times \mathrm{x} = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle\},$$

$\mathrm{a} \in \mathrm{x}$. Разбира се, множеството C може да съдържа и елементи, непринадлежащи на никой елемент на B. За да ги отстраним да разгледаме множеството $\mathrm{f} = \mathrm{C} \cap (\cup \mathrm{B})$. Ще покажем, че f е функция с $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$ и таква, че за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}$.

Наистина, понеже $\mathrm{f} = \mathrm{C} \cap (\cup \mathrm{B}) \subseteq \cup \mathrm{B}$, то $\mathrm{Rel}(\mathrm{f})$. Нека сега a, b и b' са такива, че:

$$\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \mathrm{f}.$$

Тогава $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \cup \mathrm{B}$. Нека $\mathrm{x}, \mathrm{x}' \in \mathrm{A}$ са свидетели за това, т.е. $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle \in \{\mathrm{x}\} \times \mathrm{x}$ и $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \{\mathrm{x}'\} \times \mathrm{x}'$. Следователно $\mathrm{x} = \mathrm{a} = \mathrm{x}'$ и $\mathrm{b}, \mathrm{b}' \in \mathrm{a}$, откъдето $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}' \rangle \in \{\mathrm{a}\} \times \mathrm{a}$. Понеже са и елементи на C, то $\mathrm{b} = \mathrm{b}'$. Така $\mathrm{Funct}(\mathrm{f})$.

Понеже $\mathrm{f} \subseteq \cup \mathrm{B}$, то $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) \subseteq \mathrm{A}$. За обратното включване, нека $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ е произволно. Нека $\mathrm{a} \in \mathrm{x}$ е такова, че $\mathrm{C} \cap (\{\mathrm{x}\} \times \mathrm{x}) = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle\}$. Понеже $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \in \cup \mathrm{B}$, то $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \in \mathrm{f}$. В частност, $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{f})$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{a} \in \mathrm{x}$. Така $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$. $\dashv$

Теорема 4Б.3. AC, **Rel** *и* **Inj** *са еквивалентни.*

Доказателство. **Rel** $\to$ **Inj** Нека $\mathrm{Funct}(\mathrm{f})$. Следователно $\mathrm{Rel}(\mathrm{f}^{-1})$. Нека g е такава функция, че $\mathrm{Dom}(\mathrm{g}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{f}^{-1})$ и $\mathrm{g} \subseteq \mathrm{f}^{-1}$. Така $\mathrm{g}^{-1} \subseteq (\mathrm{f}^{-1})^{-1} = \mathrm{f}$ и, понеже $\mathrm{Funct}(\mathrm{f})$, то $\mathrm{Funct}(\mathrm{g}^{-1})$. Тъй като $(\mathrm{g}^{-1})^{-1} = \mathrm{g}$, то $\mathrm{Inj}(\mathrm{g}^{-1})$. Остава да забележим, че:

$$\mathrm{Rng}(\mathrm{g}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{g}) = \mathrm{Dom}(\mathrm{f}^{-1}) = \mathrm{Rng}(\mathrm{f}).$$

Inj $\to$ **AM** Нека A е множество от непразни две по две непресичащи се множества. Нека $\mathrm{f} : \cup \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ е функцията, определена чрез: $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \mathrm{x} \leftrightarrow \mathrm{a} \in \mathrm{x}$. От вида на A следва, че функцията f е коректно дефинирана. Понеже всеки елелемнт на A е непразен, то $\mathrm{Rng}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$. Нека по **Inj** $\mathrm{g} \subseteq \mathrm{f}$ е такава функция, че $\mathrm{Rng}(\mathrm{g}) = \mathrm{Rng}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}$ и g е инективна. Тогава $\mathrm{Funct}(\mathrm{g}^{-1})$ и $\mathrm{Dom}(\mathrm{g}^{-1}) = \mathrm{Rng}(\mathrm{g}) = \mathrm{A}$.

Да забележим, че за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) \in \mathrm{y}$. Наистина, нека $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}$. Тогава $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$, откъдето $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \mathrm{x}$. Сега от дефиницията на f получаваме, че $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) = \mathrm{a} \in \mathrm{x}$.

Оттук, за всяко $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{Rng}(\mathrm{g}^{-1}) \cap \mathrm{x}$ е синглетон; така $\mathrm{Rng}(\mathrm{g}^{-1})$ е селектор за A.

AC1 $\to$ **Rel** Нека $\mathrm{Rel}(\mathrm{R})$. Нека

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{u} \mid \mathrm{u} \in \mathcal{P}(\mathrm{Rng}(\mathrm{R})) \ \& \ (\exists \mathrm{x})[\mathrm{x} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \ \& \ \mathrm{u} = \mathrm{R}[\{\mathrm{x}\}]]\} =$$

$$= \{R[\{x\}] \ \mid x \in \mathrm{Dom}(R)\}.$$

Нека $u \in A$. Тогава $(\exists\, x \in \mathrm{Dom}(R))[u = R[\{x\}]]$. Нека x_0 е свидетел за това. В частност, $x_0 \in \mathrm{Dom}(R)$ Така има y такова, че $\langle x_0, y\rangle \in R$. Следователно $y \in R[\{x_0\}]$, откъдето $y \in u$. Така $(\forall\, u \in A)[u \neq \varnothing]$.

Нека f е такава, че: $\mathrm{Funct}(f), \mathrm{Dom}(f) = A$ и $(\forall\, x \in A)[f(x) \in x]$. Определяме функцията g, като за всяко $x \in \mathrm{Dom}(R)$,

$$g(x) = f(R[\{x\}]).$$

Така: $\mathrm{Funct}(g)$ с $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(R)$ и $g(x) \in R[\{x\}]$. Тогава $\langle x, g(x)\rangle \in R$ и, следователно, $g \subseteq R$. ⊣

4B. Лема на Zorn

Теорема 4B.1. ZL → AC

Доказателство. Нека A е произволно множество. Нека:

$$F = \{f \ \mid \ f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \nrightarrow A \ \& \ (\forall\, x \in \mathrm{Dom}(f))[f(x) \in x]\}.$$

Тогава $\langle F, \subseteq_F\rangle$ е ч.н.м., в което всяка верига има горна граница. Наистина, нека $F_0 \subseteq F$ е верига. Тогава за всяко $f \in F_0$, $f \subseteq \cup F_0$. Понеже F_0 е верига от функции, то $\cup F_0$ също е функция като $\mathrm{Dom}(\cup F_0) = \cup\{\mathrm{Dom}(f) \ \mid \ f \in F_0\} \subseteq \mathcal{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ и за всяко $x \in \mathrm{Dom}(\cup F_0)$, $\cup F_0(x) \in x$. Тогава $\cup F_0 \in F$ и, следователно, е горна граница за веригата F_0.

Нека $\bar{f}$ е максимален елемент за $\langle F, \subseteq_F\rangle$. Не е трудно да се съобрази, че $\mathrm{Dom}(\bar{f}) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Да забележим също, че за всеки непразни $x, y \subseteq A$, $\bar{f}(x) \in x$ и $x \neq y \to \bar{f}(y) \notin x$. Следователно $\bar{f}$ е функция на избора за A. ⊣

Теорема 4B.2. AC → ZL

Доказателство. Нека $\langle A, \leq_A\rangle$ е ч.н.м., в което всяка верига има горна граница. Нека h е функция на избора за A и $\infty \notin A$. За всяко $B \subseteq A$ да означим с $M(B)$ множеството от строгите горни граници на B:

$$M(B) = \{t \in A \ \mid \ (\forall\, x \in B)[x <_A t]\}.$$

Да забележим, че $B \cap M(B) = \varnothing$.

Определяме[2] с рекурсия по ординалите операцията F:
$\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{h}(\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)))$, ако $\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)$ е верига; в противен случай, $\mathrm{F}(\alpha) = \infty$.

Тогава, ако $\alpha < \beta$ и $\mathrm{F}(\beta) \neq \infty$, то $\mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$ и $\mathrm{F}(\alpha) <_{\mathrm{A}} \mathrm{F}(\beta)$. Наистина, ако $\alpha < \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$. Тогава $\mathrm{F} \restriction \alpha \subseteq \mathrm{F} \restriction \beta$, откъдето $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha) \subseteq \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$ и, следователно,

$$\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)) \subseteq \mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)).$$

Понеже $\mathrm{F}(\beta) \neq \infty$, то $\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$ е верига. Следователно, $\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha)$ е верига. Тогава $\mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$.

Тъй като $\alpha \in \beta$, то $\mathrm{F}(\alpha) \in \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$. От друга страна, $\mathrm{F}(\beta) \in \mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta))$, откъдето $\mathrm{F}(\beta) \notin \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$. Така $\mathrm{F}(\alpha) \neq \mathrm{F}(\beta)$. Понеже $\mathrm{F}(\beta)$ е горна граница за $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$, чийто елемент е и $\mathrm{F}(\alpha)$, получаваме, че $\mathrm{F}(\alpha) <_{\mathrm{A}} \mathrm{F}(\beta)$.

Ако за всеки ординал α, $\mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$, то операцията F би била инективна върху ординалите като образът на всеки ординал ще е елемент на множеството A. Следователно има поне един ординал изобразен в ∞. Нека тогава

$$\alpha_0 = \mu\, \alpha[\mathrm{F}(\alpha) = \infty].$$

Сега ако $\alpha < \beta < \alpha_0$, то $\mathrm{F}(\alpha), \mathrm{F}(\beta) \neq \infty$, откъдето $\mathrm{F}(\alpha) <_{\mathrm{A}} \mathrm{F}(\beta)$. Следователно, $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)$ е верига. Но понеже $\mathrm{F}(\alpha_0) = \infty$, то тогава трябва $\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)) = \varnothing$. Така, ако b е горна граница за $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)$, каквато трябва да има според предположението, то b е максимален елемент за $\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$. $\dashv$

[2]Нека G е операцията, която се определя от теоретико-множественото свойство $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}}, \infty, \mathrm{h})$:

- $\mathrm{y} = 0$ & [$\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$ не е ч.н.м., в което всяка верига има т.г.гр. $\vee$ $\vee$ $\infty \in \mathrm{A}$ $\vee$ h не е функция на избора за A $\vee$ $\neg\mathrm{Funct}(\mathrm{x})$],
  или
- $\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$ е ч.н.м., в което всяка верига има т.г.гр. & $\infty \notin \mathrm{A}$ & & h е функция на избора за A & Funct(x) & $\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{x})) \neq \varnothing$ & & Rng(x) е верига & $\mathrm{y} = \mathrm{h}(\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{x})))$,
  или
- $\langle \mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}} \rangle$ е ч.н.м., в което всяка верига има т.г.гр. & $\infty \notin \mathrm{A}$ & & h е функция на избора за A & Funct(x) & & [$\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(\mathrm{x})) = \varnothing$ $\vee$ Rng(x) не е верига] & $\mathrm{y} = \infty$.

Сега F е определимата операция, за която за всеки ординал α, $\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{G}(\mathrm{F} \restriction \alpha)$.

4Г. Принцип за добра наредимост

Теорема 4Г.1. *Нека A е множество, което има функция на избора. Тогава съществуват ординал α и биекция $f\colon \alpha \to A$.*

Доказателство. Нека h е функция на избора за A и $\infty \notin \mathrm{A}$. Определяме с рекурсия по ординалите операцията F:
$\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{h}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha))$, ако $\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha) \neq \varnothing$; в противен случай, $\mathrm{F}(\alpha) = \infty$.

Тогава, ако $\alpha < \beta$ и $\mathrm{F}(\beta) \neq \infty$, то $\mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$ и $\mathrm{F}(\alpha) \neq \mathrm{F}(\beta)$. Наистина, ако $\alpha < \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$. Тогава $\mathrm{F} \restriction \alpha \subseteq \mathrm{F} \restriction \beta$, откъдето $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha) \subseteq \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$ и, следователно,

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta) \subseteq \mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha).$$

Понеже $\mathrm{F}(\beta) \neq \infty$, то $\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta) \neq \varnothing$. Тогава, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha) \neq \varnothing$ и така $\mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$.

Тъй като $\alpha \in \beta$, то $\mathrm{F}(\alpha) \in \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$. От друга страна, $\mathrm{F}(\beta) \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$, откъдето $\mathrm{F}(\beta) \notin \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \beta)$. Така $\mathrm{F}(\alpha) \neq \mathrm{F}(\beta)$.

Следователно трябва да има ординал α такъв, че $\mathrm{F}(\alpha) = \infty$. Наистина, в противен случай операцията F щеше да бъде инективна върху ординалите като всеки ординал щеше да бъде изобразен в елемент на множеството A, което е невъзможно. Нека α_0 е най-малкият ординал, който се изобразява от F в ∞:

$$\alpha_0 = \mu\, \alpha[\mathrm{F}(\alpha) = \infty].$$

Ще покажем, че функцията $\mathrm{F} \restriction \alpha_0$ е биекция между α_0 и множеството A. Действително, $\mathrm{Dom}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0) = \alpha_0$. За всяко $\alpha \in \alpha_0$ е в сила, че $(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)(\alpha) = \mathrm{F}(\alpha) \neq \infty$. Следователно,

$$(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)(\alpha) = \mathrm{F}(\alpha) \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha) \subseteq \mathrm{A}$$

и така $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0) \subseteq \mathrm{A}$. Понеже $\mathrm{A} \setminus \mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0) = \varnothing$, то $\mathrm{Rng}(\mathrm{F} \restriction \alpha_0) = \mathrm{A}$. Така $\mathrm{F} \restriction \alpha_0$ е сюрективна.

Накрая нека $\alpha < \beta \in \alpha_0$. Тогава $\mathrm{F}(\alpha), \mathrm{F}(\beta) \neq \infty$ и

$$(\mathrm{F} \restriction \alpha_0)(\alpha) = \mathrm{F}(\alpha) \neq \mathrm{F}(\beta) = (\mathrm{F} \restriction \alpha_0)(\beta),$$

т.е. $\mathrm{F} \restriction \alpha_0$ е и инективна. Окончателно, $\mathrm{f} = \mathrm{F} \restriction \alpha_0$ е взаимно еднозначно съответствие между ординала α_0 и множеството A. $\dashv$

Теорема 4Г.2. AC $\leftrightarrow$ WOP

Доказателство. $(\rightarrow)$ Нека A е множество. По **AC** A има функция на избора. Нека тогава α е ординал и $\mathrm{f} : \alpha \to \mathrm{A}$ е биекция. Тогава релацията

$$\leq_A = \{\langle f(\beta), f(\gamma)\rangle \mid \beta \leq \gamma \in \alpha\}$$

индуцирана от наредбата $\leq$ в α е добра наредба в A.

($\leftarrow$) Нека A е множество и $\leq_A$ е добра наредба в него. Тогава функцията

$$h(x) = min_{\leq_A}(x)$$

е функция на избора за A. $\dashv$

4Д. Закон за трихотомия

Теорема 4Д.1. AC $\rightarrow$ TL

Доказателство. Нека a и b са произволни множества. Понеже имат функции на избора, то по Теорема 4Г.1, съществуват ординали α и β такива, че $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$ и $\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{\beta}}$. По трихотомията на ординалите имаме, че $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$. Тогава $\overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$ или $\overline{\overline{\beta}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$. Така $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$ или $\overline{\overline{b}} \leq \overline{\overline{a}}$. $\dashv$

Теорема 4Д.2. TL $\rightarrow$ WOP

Доказателство. Нека A е произволно множество. Понеже $\overline{\overline{\mathcal{H}(A)}} \not\leq \overline{\overline{A}}$, то $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}}$. Нека f е инективно влагане на A в $\mathcal{H}(A)$. Тогава A е добре наредено от индуцираната чрез f^{-1} добра наредба на ординала $\mathcal{H}(A)$:

$$\{\langle a, b\rangle \mid a, b \in A \ \& \ f(a), f(b) \in \mathcal{H}(A) \ \& \ f(a) \leq f(b)\}.$$

$\dashv$

4Е. Аксиома за избора и кардинални числа

Аксимата за избора ни дава възможност по сравнително прост начин да дефинираме понятието за мощност на множество. Да припомним, че в `ZFC` всяко множество е равномощно на ординал:

$$(\forall a)(\exists \alpha)[\ \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}\ ].$$

Това свойство ни гарантира, че всяко множество може да бъде добре наредено и, че всеки клас на еквивалентност от равномощните с дадено множество множества съдържа ординал. Сега можем да изберем най-малкия ординал във всеки такъв клас на равномощни множества като каноничен представител на класа.

Определение 4Е.1. *Кардинално число на множеството a ще наричаме най-малкия ординал, равномощен с него:*

$$\overline{\overline{a}} = \mu\, \alpha[\ \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}\ ].$$

Направо от горното определение получаваме, че следните свойства са в сила за всяко множество a и всеки ординал α:

(1) a е равномощно с кардиналното си число $\overline{\overline{\mathrm{a}}}$: $\overline{\overline{\mathrm{a}}} = \overline{\overline{(\overline{\overline{\mathrm{a}}})}}$;
(2) $\mathrm{ord}(\overline{\overline{\mathrm{a}}})$;
(3) $\alpha < \overline{\overline{\mathrm{a}}} \;\rightarrow\; \neg(\overline{\overline{\mathrm{a}}} = \overline{\overline{\alpha}})$;
(4) $\overline{\overline{\alpha}} \leq \alpha$.

От (3) следва, че за всяко множесво a, съответното му кардиналното число $\overline{\overline{\mathrm{a}}}$ е кардинал:

$$(\forall\, \mathrm{a})[\ \mathrm{card}(\overline{\overline{\mathrm{a}}})\ ].$$

Понеже всеки кардинал κ е най-малкият ординал рвномощен с κ,

$$\mathrm{card}(\kappa) \;\rightarrow\; \kappa = \mu\,\alpha[\ \overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\alpha}}\ ],$$

то мощността на всеки кардинл е равна на самият него:

$$\mathrm{card}(\kappa) \;\rightarrow\; \overline{\overline{\kappa}} = \kappa.$$

Следователно, всеки кардинал е кардинално число на подходящо множество. Така:

$$(\forall\, \mathrm{x})[\ \mathrm{card}(\mathrm{x}) \;\leftrightarrow\; (\exists\, \mathrm{a})[\ \mathrm{x} = \overline{\overline{\mathrm{a}}}\ ]].$$

След въвеждането на означението за мощност на множество може да възникне проблем с тълкуването на записа $\overline{\overline{\mathrm{a}}} = \overline{\overline{\mathrm{b}}}$. От една страна можем да го разглеждаме като описание на това, че множествата a и b са равномощни. Може обаче да бъде разгледано и като описание на това, че кардиналните числа на a и b са равни. Оказва се обаче, че двете интерпретации на записа $\overline{\overline{\mathrm{a}}} = \overline{\overline{\mathrm{b}}}$ са еквивалентни.

Твърдение 4E.2. *Две множества са равномощни тогава и само тогава, когато имат равни кардинални числа:*

$$(\forall\, a)(\forall\, b)[\ \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}} \;\leftrightarrow\; (\overline{\overline{a}}) = (\overline{\overline{b}})\ ].$$

Доказателство. Нека $\kappa = \overline{\overline{\mathrm{a}}}$ и $\lambda = \overline{\overline{\mathrm{b}}}$ и да предположим първо, че a и b са равномощни. Но κ е равномощно с a и λ е равномощно с b, откъдето κ и λ са равномощни. Понеже и двете са кардинали, то непременно $\kappa = \lambda$.

Нека сега $\kappa = \lambda$. Но κ е равномощно с a и λ е равномощно с b, откъдето a и b са равномощни. $\dashv$

По подобен начин може да се покаже, че понятието за кардинално число е съгласувано и с отношенията $\leq$ и $<$ между мощности на множества.

Твърдение 4E.3. *За всеки две множества a и b:*

(1) *мощността на a е по-малка или равна от тази на b точно тогава, когато кардиналното число на a е по-малко или равно на това на b,*

$$\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}} \leftrightarrow (\overline{\overline{a}}) \leq (\overline{\overline{b}});$$

(2) *мощността на a е строго по-малка от тази на b точно тогава, когато кардиналното число на a е строго по-малко от това на b,*

$$\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{b}} \leftrightarrow (\overline{\overline{a}}) < (\overline{\overline{b}}).$$

Упражнение 4E.4. *Докажете горното твърдение.*

Библиография

Азбучен указател