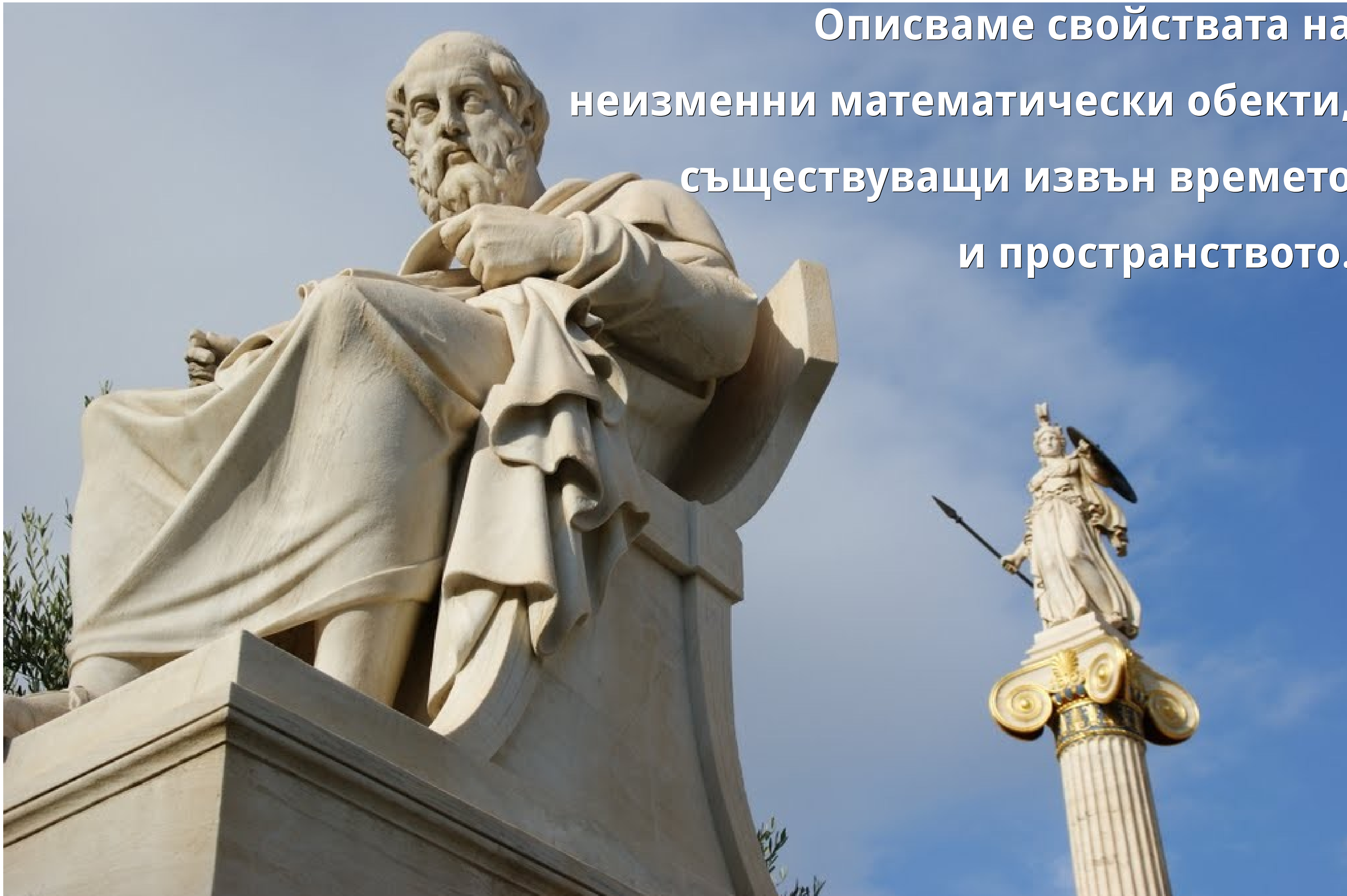
Конструктивно доказателство на пълнотата на класическата логика

Антон Зиновиев

Пролетна научна сесия на ФМИ, 2016 г.

Секция „Математическа логика и приложенията ѝ“

Класическа математика

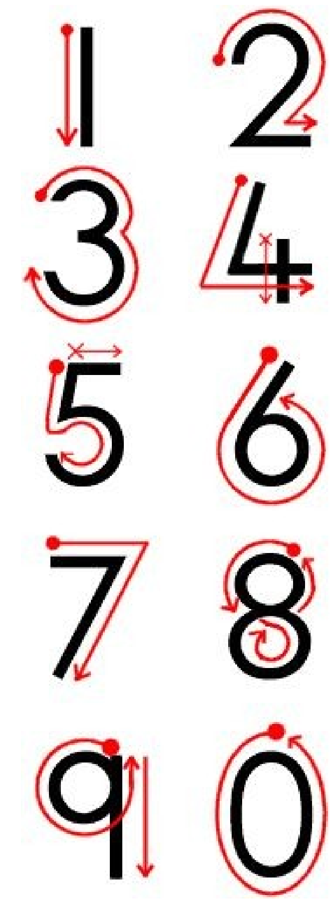


Описваме свойствата на неизменни математически обекти, съществуващи извън времето и пространството.

на снимката: Платон и Атина

Конструктивна математика

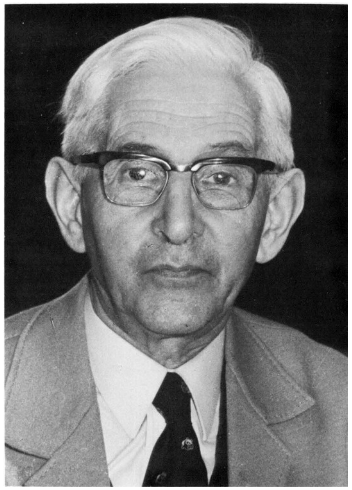
Числата не просто имат сбор, но може да бъдат събирани. Уравненията не просто имат решение, но може да бъдат решавани.



на снимката: Мухаммад ибн Муса ал-Хуразми

Интуиционистка логика

- Езикът на класическата логика, но с алтернативна интерпретация на две от логическите операции:
  - $\exists x \varphi[x]$ = „можем да намерим (изчислим) такова x, че $\varphi[x]$“
  - $\varphi \vee \psi$ = „можем да установим дали φ, или ψ“
- **Пример:** $\forall x \exists y \varphi[x, y], \exists x \varphi[x] \Rightarrow \exists y \psi[y]$
- Верността на формула в структура зависи не само от свойствата на структурата, но и от това с какви алгоритмични методи разполагаме.



на снимката: Аренд Хейтинг

Отрицателен превод

- Двойното отрицание маха конструктивната информация
  - класическо $\exists x \varphi[x]$ = интуиционистко $\neg\neg\exists x \varphi[x]$
  - класическо $\varphi \vee \psi$ = интуиционистко $\neg\neg(\varphi \vee \psi)$

Отрицателен превод

- Двойното отрицание маха конструктивната информация
  - класическо $\exists x \varphi[x]$ = интуиционистко $\neg\neg\exists x \varphi[x]$
  - класическо $\varphi \vee \psi$ = интуиционистко $\neg\neg(\varphi \vee \psi)$
- Всяка класическа теория може да се преведе на езика на интуиционистката логика.
  - Аритметиката на Хейтинг – консервативно разширение на Пеановата
  - Интуиционистката теория на множествата – на Цермело – Френкел

Отрицателен превод

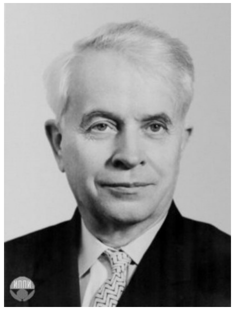
- Двойното отрицание маха конструктивната информация
  - класическо $\exists x \varphi[x]$ = интуиционистко $\neg\neg\exists x \varphi[x]$
  - класическо $\varphi \vee \psi$ = интуиционистко $\neg\neg(\varphi \vee \psi)$
- Всяка класическа теория може да се преведе на езика на интуиционистката логика.
  - Аритметиката на Хейтинг – консервативно разширение на Пеановата
  - Интуиционистката теория на множествата – на Цермело – Френкел
- **Тезис на Чърч:** $\forall x \exists y \varphi[x, y] \Rightarrow \exists e \forall x (! f_e(x) \wedge \varphi[x, f_e(x)])$

Конструктивен поглед върху пълнотата

Ако няма структура, в която φ е вярна,

то има извод на противоречие от φ.

- **Гьодел и Крайзел (1962):** Ако интуиционистката логика е пълна, то принципът на Марков е верен.
  - Интуиционистите заключават, че е безнадеждно да доказваме пълнотата в метаезика.
  - Можем обаче да докажем пълнотата по отношение на някоя семантика, напр. модели на Бет (Фридман, 1975).



отгоре надолу: Гьодел, Крайзел, Марков, Фридман

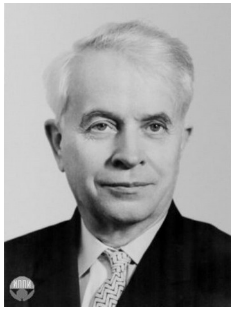
Конструктивен поглед върху пълнотата

Ако няма структура, в която φ е вярна,
то има извод на противоречие от φ.

- **Гьодел и Крайзел (1962):** Ако интуиционистката логика е пълна, то принципът на Марков е верен.
  - Интуиционистите заключават, че е безнадеждно да доказваме пълнотата в метаезика.
  - Можем обаче да докажем пълнотата по отношение на някоя семантика, напр. модели на Бет (Фридман, 1975).
- **Ами контрапозицията?**

Ако няма извод на противоречие, **то** има модел.






отгоре надолу: Гьодел, Крайзел, Марков, Фридман

И какво все пак значи алгоритъм?

- Понятието „алгоритъм“ е част от семантиката на интуиционисткaта логика. Смисълът на това понятие обаче не е фиксиран от логиката.
- Ако приемем, че „алгоритъм = машина на Тюринг“, то верните формули няма да образуват алгоритмически изброимо множество (Крайзел, 1970).

И какво все пак значи алгоритъм?

- Понятието „алгоритъм“ е част от семантиката на интуиционистката логика. Смисълът на това понятие обаче не е фиксиран от логиката.
- Ако приемем, че „алгоритъм = машина на Тюринг“, то верните формули няма да образуват алгоритмически изброимо множество (Крайзел, 1970).

Обаче: класическата логика е фрагмент на интуиционистката, чиято семантика не зависи от смисъла на понятието алгоритъм.

Теоремата за пълнота и „големите пет“ подсистеми на аритметиката от втори ред

- „Големите пет“: RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π_1^1-CA_0
- Доказателството на теоремата за пълнота може да се направи в WKL_0.
- Идея:
  - ако φ е неопровержима, то със скулемизация (тя е конструктивна!) получаваме такава безкванторна ψ,
    че от ψ следва φ и ψ е неопровержима;
  - ербранов универсум и ербранова интерпретация на функ. с-ли;
  - посредством слабата лема на Кьониг намираме интерпретация на пред. с-ли, която ни дава модел на ψ, а значи и на φ.

Конструктивно доказателство на пълнотата

Ако няма извод на противоречие, **то** има модел.

- Класическото доказателство на пълнотата, използващо WKL_0, може да се конструктивизира.

Конструктивно доказателство на пълнотата

Ако няма извод на противоречие, **то** има модел.

- Класическото доказателство на пълнотата, използващо WKL_0, може да се конструктивизира. Значи има алгоритъм, който:
  - по дадена формула φ ни дава разширение на сигнатурата с краен брой нови функционални с-ли;
  - за всяка затворена атомарна формула от така разширената сигнатура, ни дава формула от езика на Пеановата аритметика.

  Това дефинира ербранова структура, в която една затворена атомарна формула е вярна тогава и само тогава, когато е вярна получената за нея формула от Пеановата аритметика.
- Ако φ е неопровержима, то така получената структура е модел на φ.