Първо контролно по Дискретни Структури, 06.11.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ А

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено число $n \geqq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Доказателство: с индукция по n:
База: $1^3 = \frac{1^2.(1+1)^2}{4}$.
ИП: Нека допуснем, че твърдението е вярно за n.
Тогава $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)((n+1)+1)^2}{4}$.
Съгласно метода на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко n.

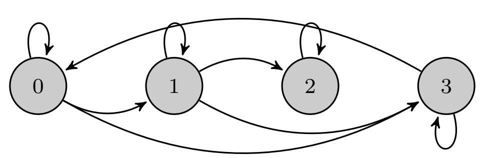
Задача 2. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqq \frac{1}{2}\}$. Намерете: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$ и $A \Delta B$.
Решение: $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, а $B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
$A \cup B = (-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$
$A \cap B = (1, \frac{3}{2}]$
$A \setminus B = (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
$A \Delta B = (-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Задача 3. Докажете, че $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Вярно ли е, че $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$? Обосновете отговора си.
Доказателство: $x \in A \times (B \cup C) \leftrightarrow x = (u,v) \ \& \ u \in A \ \& \ v \in B \cup C \leftrightarrow x = (u,v) \ \& \ u \in A \ \& \ (v \in B \ \vee \ v \in C) \leftrightarrow x = (u,v) \ \& \ (u \in A \ \& \ v \in B) \ \vee \ (u \in A \ \& \ v \in C) \leftrightarrow x \in A \times B \ \vee \ x \in A \times C \leftrightarrow x \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
$A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$, защото $A \subseteq A \cup (B \times C)$, а $(A \cup B) \times (A \cup C)$ не винаги съдържа елементи от A. Така ако вземем $A = B = C = \{1\}$, имаме $A \cup (B \times C) = \{1\} \cup \{(1,1)\} = \{1, (1,1)\}$ и $(A \cup B) \times (A \cup C) = (\{1\} \cup \{1\}) \times (\{1\} \cup \{1\}) = \{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\}$.

Задача 4. Представете графично и таблично релацията $R = \{(0,3), (0,1), (0,0), (1,3), (1,2), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$ над множеството $\{0,1,2,3\}$. Определете дали релацията е рефлексивна, антирефлексивна, симетрична или антисиметрична. Намерете $R \circ R$.
Решение: Табличното представяне на R е:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Графичното представяне на R е:



Релацията е рефлексивна, защото има 1-ци по главния диагонал (или защото всеки връх има примка), не е симетрична, защото $(0,1) \in R$, а $(1,0) \notin R$, не е антисиметрична, защото $0 \neq 3$, $(0,3) \in R$ и $(3,0) \in R$.
$R \circ R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,0), (3,1), (3,3)\}$.

Първо контролно по Дискретни Структури, 06.11.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Б

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено число $n \geqq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Доказателство: с индукция по n:
База: $1^2 = \frac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}$.
ИП: Нека допуснем, че твърдението е вярно за n.
Тогава $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+1)}{6}$.
Съгласно метода на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко n.

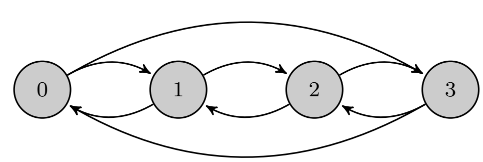
Задача 2. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > \frac{1}{2}\}$. Намерете: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$ и $A \Delta B$.
Решение: $A = [-1, 1]$, а $B = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.
$A \cup B = (-\infty, 1] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
$A \cap B = [-1, \frac{1}{2})$
$A \setminus B = (\frac{1}{2}, 1]$
$A \Delta B = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Задача 3. Докажете, че $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$. Вярно ли е, че $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$? Обосновете отговора си.
Доказателство: $X \in 2^{A \cap B} \leftrightarrow X \subseteq A \cap B \leftrightarrow X \subseteq A \ \& \ (X \subseteq B) \leftrightarrow X \in 2^A \ \& \ X \in 2^B \leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B$.
$2^{A \cup B} \neq 2^A \cup 2^B$, защото $2^{A \cup B}$ съдържа подмножества на $A \cup B$, които могат да съдържат елементи и от A и от B, а $2^A \cup 2^B$ съдържа елементи, които са подмножества само на A или само на B. Така ако вземем $A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, имаме $2^{A \cup B} = 2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, а $2^A \cup 2^B = 2^{\{1\}} \cup 2^{\{2\}} = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

Задача 4. Представете графично и таблично релацията $R = \{(0,1), (0,3), (1,0), (1,2), (2,1), (2,3), (3,0), (3,2)\}$ над множеството $\{0,1,2,3\}$. Определете дали релацията е рефлексивна, антирефлексивна, симетрична или антисиметрична. Намерете $R \circ R$.
Решение: Табличното представяне на R е:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Графичното представяне на R е:



Релацията е антирефлексивна, защото има 0-и по главния диагонал (или защото никой връх няма примка), релацията е симетрична, защото матрицата е симетрична (или защото за всяка стрелка между два различни елемента има стрелка между същите елементи в обратната посока, не е антисиметрична, защото $0 \neq 3$, $(0,3) \in R$ и $(3,0) \in R$.
$R \circ R = \{(0,0), (0,2), (1,1), (1,3), (2,0), (2,2), (3,1), (3,3)\}$.

Първо контролно по Дискретни Структури, 06.11.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ В

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено число $n \geqq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Доказателство: с индукция по n:
База: $1^3 = \frac{1^2.(1+1)^2}{4}$.
ИП: Нека допуснем, че твърдението е вярно за n.
Тогава $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)((n+1)+1)^2}{4}$.
Съгласно метода на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко n.

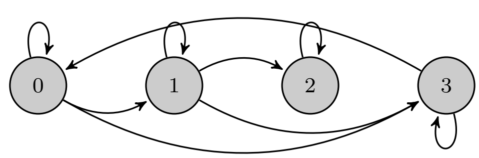
Задача 2. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leqq \frac{3}{4}\}$. Намерете: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$ и $A \Delta B$.
Решение: $A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, а $B = [\frac{5}{4}, \frac{11}{4}]$.
$A \cup B = (-\infty, -2) \cup [\frac{5}{4}, +\infty)$
$A \cap B = (2, \frac{11}{4}]$
$A \setminus B = (-\infty, -2) \cup (\frac{11}{4}, +\infty)$
$A \Delta B = (-\infty, -2) \cup [\frac{5}{4}, 2] \cup (\frac{11}{4}, +\infty)$.

Задача 3. Докажете, че $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. Вярно ли е, че $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$? Обосновете отговора си.
Доказателство: $x \in A \times (B \cap C) \leftrightarrow x = (u, v)$ & $u \in A$ & $v \in B \cap C \leftrightarrow x = (u, v)$ & $u \in A$ & $v \in B$ & $v \in C \leftrightarrow x = (u, v)$ & $u \in A$ & $v \in B$ & $u \in A$ & $v \in C \leftrightarrow x \in A \times B$ & $x \in A \times C \leftrightarrow x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.
$A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$, защото $A \cap (B \times C) \subseteq A$, а $(A \cap B) \times (A \cap C) \subseteq A \times A$. Така ако вземем $A = B = C = \{1\}$, имаме $A \cap (B \times C) = \{1\} \cap \{(1,1)\} = \emptyset$ и $(A \cap B) \times (A \cap C) = (\{1\} \cap \{1\}) \times (\{1\} \cap \{1\}) = \{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\}$.

Задача 4. Представете графично и таблично релацията $R = \{(0,3), (0,1), (0,0), (1,3), (1,2), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$ над множеството $\{0,1,2,3\}$. Определете дали релацията е рефлексивна, антирефлексивна, симетрична или антисиметрична. Намерете $R \circ R$.
Решение: Табличното представяне на R е:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Графичното представяне на R е:



Релацията е рефлексивна, защото има 1-ци по главния диагонал (или защото всеки връх има примка), не е симетрична, защото $(0,1) \in R$, а $(1,0) \notin R$, не е антисиметрична, защото $0 \neq 3$, $(0,3) \in R$ и $(3,0) \in R$.
$R \circ R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0)(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,0), (3,1), (3,3)\}$.

Първо контролно по Дискретни Структури, 06.11.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Г

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено число $n \geqq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Доказателство: с индукция по n:
База: $1^2 = \frac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}$.
ИП: Нека допуснем, че твърдението е вярно за n.
Тогава $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+1)}{6}$.
Съгласно метода на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко n.

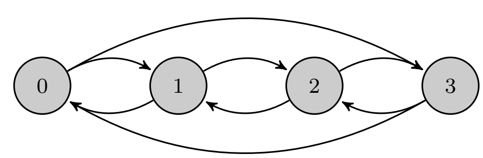
Задача 2. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > \frac{3}{4}\}$. Намерете: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$ и $A \Delta B$.
Решение: $A = [-2, 2]$, а $B = (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}, +\infty)$.
$A \cup B = \mathbb{R}$
$A \cap B = [-2, \frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}, 2]$
$A \setminus B = [\frac{1}{4}, \frac{7}{4}]$
$A \Delta B = (-\infty, -2) \cup [\frac{1}{4}, \frac{7}{4}] \cup (2, +\infty)$.

Задача 3. Докажете, че $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$. Вярно ли е, че $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$? Обосновете отговора си.
Доказателство: $X \in 2^{A \cap B} \leftrightarrow X \subseteq A \cap B \leftrightarrow X \subseteq A$ & $(X \subseteq B) \leftrightarrow X \in 2^A$ & $X \in 2^B \leftrightarrow X \in 2^A \cap 2^B$.
$2^{A \times B} \neq 2^A \times 2^B$, защото $2^{A \times B}$ съдържа подмножества на $A \times B$, а $2^A \times 2^B$ съдържа наредени двойки с първа компонента подмножество на A и втора компонента подмножество на B. Така ако вземем $A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, имаме $2^{A \times B} = 2^{\{(1,2)\}} = \{\emptyset, \{(1,2)\}\}$, а $2^A \times 2^B = 2^{\{1\}} \times 2^{\{2\}} = \{\emptyset, \{1\}\} \times \{\emptyset, \{2\}\} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{2\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{2\})\}$.

Задача 4. Представете графично и таблично релацията $R = \{(0,1), (0,3), (1,0), (1,2), (2,1), (2,3), (3,0), (3,2)\}$ над множеството $\{0,1,2,3\}$. Определете дали релацията е рефлексивна, антирефлексивна, симетрична или антисиметрична. Намерете $R \circ R$.
Решение: Табличното представяне на R е:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Графичното представяне на R е:



Релацията е антирефлексивна, защото има 0-и по главния диагонал (или защото никой връх няма примка), релацията е симетрична, защото матрицата е симетрична (или защото за всяка стрелка между два различни елемента има стрелка между същите елементи в обратната посока, не е антисиметрична, защото $0 \neq 3$, $(0,3) \in R$ и $(3,0) \in R$.
$R \circ R = \{(0,0), (0,2), (1,1), (1,3), (2,0), (2,2), (3,1), (3,3)\}$.