Трето контролно по Дискретни Структури, 22.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ А

Задача 1. Дадено е тесте с 52 карти. Едно раздаване се състои от 13 карти. Колко раздавания има, в които:

1. не се падат 4 еднакви карти.
2. се падат не повече от 2 попа и точно 5 кари.

Решение: Всички раздавания са $\binom{52}{13}$. Тези, при които се падат 4 еднакви карти, можем да сметнем с принципа на включването и изключването: Нека с A_i означим, множеството на всички раздавания, в които се падат четири еднакви карти i, където $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$. Тогава $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, защото в едно раздаване има най-много три различни групи по четири еднакви карти. За всяко i от 13-те вида карти, имаме $|A_i| = \binom{48}{9}$. За всяка двойка различни карти $i < j$, от които имаме $\binom{13}{2}$ на брой, имаме $|A_i \cap A_j| = \binom{44}{5}$. А за всяка тройка различни карти $i < j < k$, общо $\binom{13}{3}$, имаме $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{1}$. В крайна сметка, като приложим принципа за разликата, получаваме общо: $\binom{52}{13} - [13.\binom{48}{9} - \binom{13}{2}\binom{44}{5} + \binom{13}{3}.40]$.
За втората част имаме следните непресичащи се случаи.

1. Падат се 0 попа. Тогава избираме 5 кари от 12 (без поп каро) и още 8 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без карите и поповете). Общо $\binom{12}{5}\binom{36}{8}$.
2. Пада се 1 поп каро. Тогава избираме 4 кари от 12 (без поп каро) и още 9 карти от $52-13-3$ карти (без карите и поповете). Общо $\binom{12}{4}\binom{36}{7}$.
3. Пада се 1 поп, но не каро, за което има 3 възможности. Тогава избираме 5 кари от 12 (без поп каро) и още 7 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без карите и поповете). Общо $3\binom{12}{5}\binom{36}{7}$.
4. Падат се 2 попа, но не каро, за което има $\binom{3}{2}$ възможности. Тогава избираме 5 кари от 12 (без поп каро) и още 6 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без карите и поповете). Общо $3\binom{12}{5}\binom{36}{6}$.
5. Падат се 2 попа, единият каро, за което има 3 възможности. Тогава избираме 4 кари от 12 (без поп каро) и още 7 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без карите и поповете). Общо $3\binom{12}{4}\binom{36}{7}$.

Накрая събираме резултатите: $\binom{12}{5}\binom{36}{8} + \binom{12}{4}\binom{36}{7} + 3\binom{12}{5}\binom{36}{7} + 3\binom{12}{5}\binom{36}{6} + 3\binom{12}{4}\binom{36}{7}$.

Задача 2. Колко решения в естествените числа има уравнението:

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$.
2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, ако $x_2 \geqq 10$.
3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, ако $x_2 < 10$ и $x_3 < 6$ и $x_4 < 2$.

Решение:

1. Всяко решение може еднозначно да се представи като регистър с $25 + 5 - 1$ кутийки, в четири от които сме поставили звездички. Броят на празните кутийки преди първата звездичка съответства на стойността на x_1, между първата и втората на x_2 и т.н. Задачата се свежда до въпроса: по колко начина можем да изберем 4 кутийки, в които да поставим звездичките. Общо решнията са $\binom{25+5-1}{4}$.
2. Полагаме $x_2 = u_2 + 10$ и решаваме $x_1 + u_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$. Общо $\binom{15+4}{4}$.
3. От всички решения изваждаме броя на лошите. За да сметнем лошите изпозлваме принципа за включването и изключването: $\binom{25+5-1}{4} - [\binom{15+4}{4} + \binom{19+4}{4} + \binom{23+4}{4} - \binom{9+4}{4} - \binom{13+4}{4} - \binom{17+4}{4} + \binom{7+4}{4}]$.

Задача 3. Намерете СДНФ на f и проверете дали $f = g$, ако:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1|(x_2.x_3)) \to (x_2 \vee x_3)$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (01110111)$$

Решение: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1.x_2.x_3} \to (x_2 \vee x_3) = \overline{\overline{x_1.x_2.x_3}} \vee x_2 \vee x_3 = x_1.x_2.x_3 \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).x_2(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).(x_2 \vee \overline{x_2}).x_3 = x_1.x_2.x_3 \vee \overline{x_1}x_2.x_3 \vee \overline{x_1}x_2.\overline{x_3} \vee x_1.x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}.x_3 = \overline{x_1}.\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2.\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2.x_3 \vee x_1\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2\overline{x_3} \vee x_1.x_2.x_3$. Следователно, векторът от стойности на f е (01110111) и $f = g$.

Задача 4. Дадена е функцията:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (10001100).$$

Намерете полинома на Жегалкин на f и проверете дали f е линейна. Намерете f^* и проверете дали f е самодвойствена.

Решение: Искаме да представим f като $a_0 \oplus a_1.x_1 \oplus a_2.x_2 \oplus a_3.x_3 \oplus a_{1,2}.x_1.x_2 \oplus a_{1,3}.x_1.x_3 \oplus a_{2,3}.x_2.x_3 \oplus a_{1,2,3}.x_1.x_2.x_3$. Имаме, че $1 = f(0, 0, 0) = a_0$; $0 = f(001) = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3$, следователно $a_3 = 1$; $0 = f(010) = a_0 \oplus a_2$, следователно $a_2 = 1$; $0 = f(011) = a_0 \oplus a_2 \oplus_3 \oplus a_{2,3}$, следователно $a_{2,3} = 1$; $1 = f(100) = a_0 \oplus a_1$, следователно $a_1 = 0$; $1 = f(101) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{1,2}$, следователно $a_{1,3} = 1$; $0 = f(110) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{1,2}$, следователно $a_{1,2} = 0$; $0 = f(111) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{1,2} \oplus a_{1,3} \oplus a_{2,3} \oplus a_{1,2,3}$, следователно $a_{1,2,3} = 1$. Така полиномът на f е $1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1.x_3 \oplus x_2.x_3 \oplus x_1.x_2.x_3$. Вектора на f^* намираме от вектора на f като го обърнем, така че първата стойност става последна и после го инвертираме: 0 става 1 и обратно. В случая $f^* = (11001110)$ е различна от f и следователно f не е самодвойствена.

Трето контролно по Дискретни Структури, 22.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Б

Задача 1. Дадено е тесте с 52 карти. Едно раздаване се състои от 13 карти. Колко раздавания има, в които:

1. се падат не повече от 1 асо и точно 7 пики.
2. не се падат 10 поредни карти от една боя.

Решение:
За първата част имаме следните непресичащи се случаи.

1. Падат се 0 аса. Тогава избираме 7 пики от 12 (без асото) и още 6 карти от $52-13-3$ карти (без пиките и асата). Общо $\binom{12}{7}\binom{36}{6}$.
2. Пада се 1 асо пика. Тогава избираме 6 пики от 12 (без асото) и още 6 карти от $52-13-3$ карти (без пиките и асата). Общо $\binom{12}{6}\binom{36}{6}$.
3. Пада се 1 асо, но не пика, за което има 3 възможности. Тогава избираме 7 кари от 12 (без асото) и още 5 карти от $52-13-3$ карти (без пиките и асата). Общо $3\binom{12}{7}\binom{36}{5}$.

Накрая събираме резултатите: $\binom{12}{7}\binom{36}{6}+\binom{12}{7}\binom{36}{5}$.
Всички раздавания са $\binom{52}{13}$. Тези, при които се падат 10 поредни карти от една боя можем да сметнем с принципа на включването и изключването: Нека с A_i означим, множеството на всички раздавания, в които се падат 10 поредни купи започващи от карта i, където $i \in \{2,3,4\}$. Тогава $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k|$. За всяко i имаме $|A_i| = \binom{42}{3}$. За двойките $i=2, j=3$ и $i=3$, $j=4$ имаме $|A_i \cap A_j| = \binom{41}{1}$, а за $i=2$ и $j=4$ имаме 1 възможност (тази при която се падат всички купи). Аналогично $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$. По същият начин смятаме възможностите, когато поредните карти са пика, спатия и каро. В крайна сметка, като приложим принципа за разликата, получаваме общо: $\binom{52}{13} - 4.[3.\binom{42}{3} - 2.\binom{41}{1} - 1 + 1]$.

Задача 2. Колко решения в естествените числа има уравнението:

1. $x_1+x_2+x_3+x_4=30$.
2. $x_1+x_2+x_3+x_4=30$, ако $x_2 \geqq 15$.
3. $x_1+x_2+x_3+x_4=30$, ако $x_2<15$ и $x_3<3$ и $x_4<7$.

Решение:

1. Всяко решение може еднозначно да се представи като регистър с $30+4-1$ кутийки, в три от които сме поставили звездички. Броят на празните кутийки преди първата звездичка съответства на стойността на x_1, между първата и втората на x_2 и т.н. Задачата се свежда до въпроса: по колко начина можем да изберем 3 кутийки, в които да поставим звездичките. Общо решнията са $\binom{30+4-1}{3}$.
2. Полагаме $x_2 = u_2 + 15$ и решаваме $x_1+u_2+x_3+x_4+x_5=15$. Общо $\binom{15+3}{3}$.
3. От всички решения изваждаме броят на лошите. За да сметнем лошите използваме принципа за включването и изключването: $\binom{30+3-1}{3} - [\binom{15+3}{3}+\binom{27+3}{3}+\binom{23+3}{3}-\binom{12+2}{2}-\binom{8+3}{3}-\binom{20+3}{3}+\binom{5+3}{3}]$.

Задача 3. Намерете СДНФ на f и проверете дали $f=g$, ако:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1.x_2) \to (x_2 \downarrow x_3)$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = (11111100)$$

Решение: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1.x_2 \to \overline{(x_2 \vee x_3)} = \overline{x_1.x_2} \vee \overline{x_2}\ \overline{x_3} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}\ \overline{x_3} = \overline{x_1}.(x_2 \vee \overline{x_2}).(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).\overline{x_2}.\ \overline{x_3} = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee \overline{x_1}x_2.\overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2.x_3 \vee x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}.x_3$. Следователно, векторът от стойности на f е (11111100) и $f=g$.

Задача 4. Дадена е функцията:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (01101001).$$

Намерете полинома на Жегалкин на f и проверете дали f е линейна. Намерете f^* и проверете дали f е самодвойствена.
Решение: Искаме да представим f като $a_0 \oplus a_1.x_1 \oplus a_2.x_2 \oplus a_3.x_3 \oplus a_{1,2}.x_1.x_2 \oplus a_{1,3}.x_1.x_3 \oplus a_{2,3}.x_2.x_3 \oplus a_{1,2,3}.x_1.x_2.x_3$. Имаме, че $0 = f(0,0,0) = a_0$; $1 = f(001) = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3$, следователно $a_3 = 1$; $1 = f(010) = a_0 \oplus a_2$, следователно $a_2 = 1$; $0 = f(011) = a_0 \oplus a_2 \oplus_3 \oplus a_{2,3}$, следователно $a_{2,3} = 0$; $1 = f(100) = a_0 \oplus a_1$, следователно $a_1 = 1$; $0 = f(101) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{1,3}$, следователно $a_{1,3} = 0$; $0 = f(110) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{1,2}$, следователно $a_{1,2} = 0$; $1 = f(111) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{1,2} \oplus a_{1,3} \oplus a_{2,3} \oplus a_{1,2,3}$, следователно $a_{1,2,3} = 0$. Така полиномът на f е $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Вектора на f^* намираме от вектора на f като го обърнем, така че първата стойност става последна и после го инвертираме: 0 става 1 и обратно. В случая $f^* = (01101001)$ е равна на f и следователно f е самодвойствена.

Трето контролно по Дискретни Структури, 22.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ B

Задача 1. Дадено е тесте с 52 карти. Едно раздаване се състои от 13 карти. Колко раздавания има, в които:

1. не се падат повече от 2 валета и точно 8 спатии.
2. се падат 10 поредни карти от една боя.

Решение: За първата част от всички $\binom{52}{13}$ раздавания изваждаме лошите. Имаме следните непресичащи се случаи.

1. Падат се 3 валета, но не вале спатия. Тогава избираме 8 спатии от 12 (без вале спатия) и още 2 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без спатиите и валетата). Общо $\binom{12}{8}\binom{36}{2}$.
2. Падат се 3 валета и едно от тях е спатия. За останалите валета имаме 3 възможности. Тогава избираме още 7 спатии от 12 (без вале спатия) и още 3 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без спатиите и валетата). Общо $3.\binom{12}{7}\binom{36}{3}$.
3. Падат се 4-те валета. Тогава избираме още 7 спатии от 12 (без вале спатия) и още 2 карти от $52-13-3$ карти (без карите и поповете). Общо $\binom{12}{7}\binom{36}{2}$.

Накрая събираме резултатите: $\binom{12}{8}\binom{36}{2} + 3\binom{12}{7}\binom{36}{3} + \binom{12}{7}\binom{36}{2}$.
Тези раздавания, при които се падат 10 поредни карти от една боя, можем да сметнем с принципа на включването и изключването: Нека с A_i означим, множеството на всички раздавания, в които се падат 10 поредни купи започващи от карта i, където $i \in \{2, 3, 4\}$. Тогава $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$. За всяко i имаме $|A_i| = \binom{42}{3}$. За двойките $i = 2$,$j = 3$ и $i = 3$, $j = 4$ имаме $|A_i \cap A_j| = \binom{41}{1}$, а за $i = 2$ и $j = 4$ имаме 1 възможност (тази при която се падат всички купи). Аналогично $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$. По същият начин смятаме възможностите, когато поредните карти са пика, спатия и каро. В крайна сметка, получаваме общо: $4.[3.\binom{42}{3} - 2.\binom{41}{1} - 1 + 1]$.

Задача 2. Колко решения в естествените числа има уравнението:

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$.
2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, ако $x_2 \geqq 15$.
3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, ако $x_2 < 15$ и $x_3 < 3$ и $x_4 < 7$.

Решение:

1. Всяко решение може еднозначно да се представи като регистър с $30 + 4 - 1$ кутийки, в три от които сме поставили звездички. Броят на празните кутийки преди първата звездичка съответства на стойността на x_1, между първата и втората на x_2 и т.н. Задачата се свежда до въпроса: по колко начина можем да изберем 3 кутийки, в които да поставим звездичките. Общо решнията са $\binom{30+4-1}{3}$.
2. Полагаме $x_2 = u_2 + 15$ и решаваме $x_1 + u_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$. Общо $\binom{15+3}{3}$.
3. От всички решения изваждаме броят на лошите. За да сметнем лошите изпозлваме принципа за включването и изключването: $\binom{30+3-1}{3} - [\binom{15+3}{3} + \binom{27+3}{3} + \binom{23+3}{3} - \binom{12+2}{2} - \binom{8+3}{3} - \binom{20+3}{3} + \binom{5+3}{3}]$.

Задача 3. Намерете СДНФ на f и проверете дали $f = g$, ако:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2) \to (x_2 \to x_3)$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (11011111)$$

Решение: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1.x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_2}} \to (\overline{x_2} \vee x_3) = x_1.x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_2} \vee \overline{x_2} \vee x_3 = x_1.x_2.(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1}.\overline{x_2}.(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).(x_2 \vee \overline{x_2}).x_3 = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee \overline{x_1}.x_2.x_3 \vee x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2.\overline{x_3} \vee x_1.x_2.x_3$.
Следователно, векторът от стойности на f е (11011111) и $f = g$.

Задача 4. Дадена е функцията:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (00101100).$$

Намерете полинома на Жегалкин на f и проверете дали f е линейна. Намерете f^* и проверете дали f е самодвойствена.
Решение: Искаме да представим f като $a_0 \oplus a_1.x_1 \oplus a_2.x_2 \oplus a_3.x_3 \oplus a_{1,2}.x_1.x_2 \oplus a_{1,3}.x_1.x_3 \oplus a_{2,3}.x_2.x_3 \oplus a_{1,2,3}.x_1.x_2.x_3$. Имаме, че $0 = f(0,0,0) = a_0$; $0 = f(001) = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3$, следователно $a_3 = 0$; $1 = f(010) = a_0 \oplus a_2$, следователно $a_2 = 1$; $0 = f(011) = a_0 \oplus a_2 \oplus_3 \oplus a_{2,3}$, следователно $a_{2,3} = 1$; $1 = f(100) = a_0 \oplus a_1$, следователно $a_1 = 1$; $1 = f(101) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{1,3}$, следователно $a_{1,3} = 0$; $0 = f(110) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{1,2}$, следователно $a_{1,2} = 0$; $0 = f(111) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{1,2} \oplus a_{1,3} \oplus a_{2,3} \oplus a_{1,2,3}$, следователно $a_{1,2,3} = 1$. Така полиномът на f е $x_1 \oplus x_2 \oplus x_2.x_3 \oplus x_1.x_2.x_3$. Вектора на f^* намираме от вектора на f като го обърнем, така че първата стойност става последна и после го инвертираме: 0 става 1 и обратно. В случая $f^* = (11001011)$ е различна от f и следователно f не е самодвойствена.

Трето контролно по Дискретни Структури, 22.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Г

Задача 1. Дадено е тесте с 52 карти. Едно раздаване се състои от 13 карти. Колко раздавания има, в които:

1. се падат 4 еднакви карти.
2. не се падат повече от 2 попа и точно 7 купи.

Решение: Тези раздавания, при които се падат 4 еднакви карти, можем да сметнем с принципа на включването и изключването: Нека с A_i означим, множеството на всички раздавания, в които се падат четири еднакви карти i, където $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A\}$. Тогава $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, защото в едно раздаване има най-много три различни групи по четири еднакви карти. За всяко i от 13-те вида карти, имаме $|A_i| = \binom{48}{9}$. За всяка двойка различни карти $i < j$, от които имаме $\binom{13}{2}$ на брой, имаме $|A_i \cap A_j| = \binom{44}{5}$. А за всяка тройка различни карти $i < j < k$, общо $\binom{13}{3}$, имаме $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{1}$. В крайна сметка, получаваме общо: $[13.\binom{48}{9} - \binom{13}{2}\binom{44}{5} + \binom{13}{3}.40]$.
За втората част от всички раздавания, които са $\binom{52}{13}$, изваждаме тези които не вършат работа. Имаме следните непресичащи се случаи.

1. Падат се 0 попа. Тогава избираме 7 купи от 12 (без поп купа) и още 6 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без купите и поповете). Общо $\binom{12}{7}\binom{36}{6}$.
2. Пада се 1 поп купа. Тогава избираме 6 купи от 12 (без поп купа) и още 6 карти от $52-13-3$ карти (без купите и поповете). Общо $\binom{12}{6}\binom{36}{6}$.
3. Пада се 1 поп, но не купа, за което има 3 възможности. Тогава избираме 7 купи от 12 (без поп купа) и още 5 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без купите и поповете). Общо $3\binom{12}{7}\binom{36}{5}$.
4. Падат се 2 попа, но не купа, за което има $\binom{3}{2}$ възможности. Тогава избираме 7 купи от 12 (без поп купа) и още 4 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без купите и поповете). Общо $3\binom{12}{7}\binom{36}{4}$.
5. Падат се 2 попа, единият купа, за което има 3 възможности. Тогава избираме 6 купи от 12 (без поп купа) и още 5 карти от $52 - 13 - 3$ карти (без купите и поповете). Общо $3\binom{12}{6}\binom{36}{5}$.

Накрая събираме резултатите: $\binom{12}{7}\binom{36}{6} + \binom{12}{6}\binom{36}{6} + 3\binom{12}{7}\binom{36}{5} + 3\binom{12}{7}\binom{36}{4} + 3\binom{12}{6}\binom{36}{5}$.

Задача 2. Колко решения в естествените числа има уравнението:

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45$.
2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45$, ако $x_3 \geqq 18$.
3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45$, ако $x_2 < 1$ и $x_3 < 18$ и $x_4 < 9$.

Решение:

1. Всяко решение може еднозначно да се представи като регистър с $45 + 5 - 1$ кутийки, в четири от които сме поставили звездички. Броят на празните кутийки преди първата звездичка съответства на стойността на x_1, между първата и втората на x_2 и т.н. Задачата се свежда до въпроса: по колко начина можем да изберем 4 кутийки, в които да поставим звездичките. Общо решнията са $\binom{45+5-1}{4}$.
2. Полагаме $x_3 = u_3 + 18$ и решаваме $x_1 + x_2 + u_3 + x_4 + x_5 = 27$. Общо $\binom{27+4}{4}$.
3. От всички решения изваждаме броят на лошите. За да сметнем лошите изпозлваме принципа за включването и изключването: $\binom{45+5-1}{4} - [\binom{44+4}{4} + \binom{27+4}{4} + \binom{36+4}{4} - \binom{26+4}{4} - \binom{35+4}{4} - \binom{18+4}{4} + \binom{17+4}{4}]$.

Задача 3. Намерете СДНФ на f и проверете дали $f = g$, ако:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_3) \to (x_2 \leftrightarrow x_3)$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (10011011)$$

Решение: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1.\overline{x_3}} \to (x_2.x_3 \vee \overline{x_2}.\overline{x_3}) = x_1.\overline{x_3} \vee x_2.x_3 \vee \overline{x_2}.\overline{x_3} = x_1.(x_2 \vee \overline{x_2})\overline{x_3} \vee (x_1 \vee \overline{x_1})\overline{x_2}.\overline{x_3}. \vee (x_1 \vee \overline{x_1}).\overline{x_2 x_3} = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2.x_3 \vee x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} \vee x_1.x_2.\overline{x_3} \vee x_1.x_2.x_3$. Следователно, векторът от стойности на f е (10011011) и $f = g$.

Задача 4. Дадена е функцията:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (11010100).$$

Намерете полинома на Жегалкин на f и проверете дали f е линейна. Намерете f^* и проверете дали f е самодвойствена.
Решение: Искаме да представим f като $a_0 \oplus a_1.x_1 \oplus a_2.x_2 \oplus a_3.x_3 \oplus a_{1,2}.x_1.x_2 \oplus a_{1,3}.x_1.x_3 \oplus a_{2,3}.x_2.x_3 \oplus a_{1,2,3}.x_1.x_2.x_3$. Имаме, че $1 = f(0,0,0) = a_0$; $1 = f(001) = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3$, следователно $a_3 = 0$; $0 = f(010) = a_0 \oplus a_2$, следователно $a_2 = 1$; $1 = f(011) = a_0 \oplus a_2 \oplus_3 \oplus a_{2,3}$, следователно $a_{2,3} = 1$; $0 = f(100) = a_0 \oplus a_1$, следователно $a_1 = 1$; $1 = f(101) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{1,3}$, следователно $a_{1,3} = 1$; $0 = f(110) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{1,2}$, следователно $a_{1,2} = 0$; $0 = f(111) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{1,2} \oplus a_{1,3} \oplus a_{2,3} \oplus a_{1,2,3}$, следователно $a_{1,2,3} = 1$. Така полиномът на f е $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2.x_3 \oplus x_1.x_3 \oplus x_1.x_2.x_3$. Вектора на f^* намираме от вектора на f като го обърнем, така че първата стойност става последна и после го инвертираме: 0 става 1 и обратно. В случая $f^* = (11010100)$ е равна на f и следователно f е самодвойствена.