Частично решение на задачите от първото контролно (спец. ИС, гр. 1) от 20.11.2015 г.

Зад. 1. а) Вярно ли е, че $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$?

б) Вярно ли е, че $A \subseteq B \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$?

в) За $A = \{\emptyset, \{1\}, 1\}$ намерете степенното множество $\mathscr{P}(A)$.

Доказателство.

- Нека $A \subseteq B$. Ще докажем, че $A \cup B = B$. Ясно е, че $B \subseteq A \cup B$. Остава да докажем, че $B \subseteq A \cup B$. За целта, нека $x \in A \cup B$.
  - Ако $x \in A$, то $x \in B$, понеже $A \subseteq B$.
  - Ако $x \in B$, то е очевидно, че $x \in B$.

  Обединявайки тези два случая, получваме, че ако $x \in A \cup B$, то $x \in B$.

  Нека сега $A \cup B = B$. Ще докажем, че $A \subseteq B$. Нека $x \in A$. Следователно $x \in A \cup B$. Оттук $x \in B$, понеже $A \cup B = B$. Заключаваме, че $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$. Следователно, $A \subseteq B$.

- Задачата следва от следните еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\leftrightarrow (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\leftrightarrow (\forall x)[x \notin A \vee x \in B] \\ &\leftrightarrow (\forall x)[\neg(x \in A \ \wedge \ x \notin B)] \\ &\leftrightarrow \neg(\exists x)[x \in A \ \wedge \ x \notin B] \\ &\leftrightarrow \neg(\exists x)[x \in A \setminus B] \\ &\leftrightarrow A \setminus B = \emptyset. \end{aligned}$$

- $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{1\}, 1\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{1, \{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, 1\}\}$

Обърнете внимание, че ако A има n елемента, то $\mathscr{P}(A)$ има 2^n елемента

□

Зад. 2. Да разгледаме функциите $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$.

Възможно ли е да са частични функции?

а) Ако f е сюрективна и $g \circ f = id_A$, то докажете, че $g = f^{-1}$.

б) Ако f е инективна и $f \circ g = id_B$, то докажете, че $g = f^{-1}$.

Доказателство.

а) Възможно ли е g да не е тотална функция, т.е. да съществува $b \in B$, за което $g(b)$ не е дефинирана ? Да допуснем, че съществува такова b. Понеже f е сюрективна, съществува поне едно $a \in A$, за което $f(a) = b$. Това означава, че $(g \circ f)(a)$ не е дефинирана. Това е противоречие с условието, че $g \circ f = id_A$.

Да напомним, че $id_A(a) = a$ за всяко $a \in A$

Сега ще проверим, че f е инективна. От това ще следва, че f^{-1} е функция. Нека да разгледаме $a, a' \in A$, за които $f(a) = b = f(a')$. Ще докажем, че $a = a'$. Щом $g \circ f = id_A$, то $g(f(a)) = g(b) = a$ и $g(f(a')) = g(b) = a'$. Ясно е, че $a = a'$, защото g е функция.

f е инектвина, ако $f(a) = f(a') \to a = a'$

Понеже g е тотална, за да докажем, че $g = f^{-1}$, то е достатъчно е да покажем, че $g \subseteq f^{-1}$, т.е.

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)[g(b) = a \implies f(a) = b].$$

Нека $g(b) = a$ и $f(a') = b$. Знаем, че такова a' съществува, защото f е сюрективна. Но тогава $(g \circ f)(a') = a$ и следователно $a = a'$, защото $g \circ f = id_A$.

б) Отново, възможно ли е g да не е тотална функция, т.е. да съществува $b \in B$, за което $g(b)$ не е дефинирана? Но тогава е ясно, че $(f \circ g)(b)$ също няма да е дефинирана, което е противоречие с условието, че $f \circ g = id_B$.

Да напомним, че $id_B(b) = b$ за всяко $b \in B$

Щом g е тотална, за да докажем, че $g = f^{-1}$ е достатъчно да проверим, че $g \subseteq f^{-1}$, т.е.

Добре е да отбележим, че понеже f е инективна ние знаем, че f^{-1} е функция.

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)[g(b) = a \implies f(a) = b].$$

Това е лесно да се провери. Нека $g(b) = a$. Понеже $(f \circ g)(b) = b$, то $f(g(b)) = f(a) = b$.

Вярно ли е, че f е сюрктивна?

$\square$

Зад. 3. За произволна функция $f : A \to A$ и за произволно множество $X \subseteq A$, винаги ли е вярно, че :

а) $f(f^{-1}(X)) = X$?

б) $f^{-1}(f(X)) = X$?

Обосновете се!

Доказателство. Лесно се вижда, че двете твърдения не винаги са верни. Например, нека $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ е дефинирана като $f(x) = |x|$. Тогава:

а) За $X = \{-1, 0, 1\}$, $f^{-1}(X) = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in X\} = X$. $f(f^{-1}(X)) = f(X) = \{|x| \mid x \in X\} = \{0, 1\} \neq X$.

б) За $X = \{0, 1\}$, $f(X) = X$, но $f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(X) = \{-1, 0, 1\} \neq X$.

$\square$